UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: GESTÃO DE QUALIDADE E PRODUTIVIDADE

SIMONE GURGEL DE BRITO

MEDIDAS COMPLETAS DE EFICIÊNCIA TÉCNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FLORIANÓPOLIS
2003

SIMONE GURGEL DE BRITO

MEDIDAS COMPLETAS DE EFICIÊNCIA TÉCNICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. Jair dos Santos Lapa, Ph. D.

FLORIANÓPOLIS

2003

SIMONE GURGEL DE BRITO

MEDIDAS COMPLETAS DE EFICIÊNCIA TÉCNICA

Esta dissertação foi julgada e aprovada para a obtenção do grau de **Mestre em Engenharia de Produção** no **Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção** da Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, 13 de fevereiro de 2003.

Prof. Edson Pacheco Paladini, Dr.
Coordenador do Programa

BANCA EXAMINADORA

Prof. Jair do Santos Lapa, Ph. D.
Orientador

Prof. Volmir Eugênio Wilhelm, Dr.
Membro

Prof. João Neiva de Figueiredo, Ph. D.
Membro

Prof. Pedro Alberto Barbetta, Dr.
Membro

Aos meus pais Joca e Nerice
e ao meu esposo Sales Júnior

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me proporcionar e me acompanhar em mais esse desafio.

Ao Professor Lapa, pela sua orientação, paciência e ensinamentos, que levarei comigo para sempre.

À Professora Ieda, pelo seu apoio, confiança e amizade.

Ao Professor Mairton, pela sua dedicação e paciência em todos os momentos da execução deste trabalho.

À UERN, pelo apoio que sempre me foi dado.

Aos membros da Banca Examinadora, cujas recomendações contribuíram para o enriquecimento desta dissertação.

Aos meus companheiros de curso que muito me ajudaram durante a realização deste mestrado. Especialmente a Delsi, Gorete, Líllian, Cristina, Ismar, Célio, Leila e Michelle.

À toda a minha família e amigos que, mesmo à distância, acompanharam e acreditaram no sucesso deste empreendimento.

À Professora Agostinha Mafalda e ao seu esposo Alexandre pelo incentivo que me foi dado no início deste projeto.

Aos amigos que me ajudaram a suportar a distância da minha família. Em especial a Elaine, Iva, Mary, Heloísa, D. Rosa e Sr. Orlando.

Aos colegas de trabalho da UERN que, mesmo sobrecarregados, perceberam a importância desse momento e apoiaram a minha liberação.

Ao meu esposo Sales Júnior pelo seu amor, por ter acreditado em mim e pela sua companhia nos grandes momentos da minha vida, seja eles de sofrimento ou vitória.

À todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

BRITO, Simone Gurgel. **Medidas completas de eficiência técnica**. Florianópolis, 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. UFSC, 2003.

RESUMO

Esta dissertação originou-se da revisão bibliográfica sobre Análise Envoltória de Dados (DEA), realizada em 2001, que identificou o desafio científico que tem sido construir medidas completas de eficiência técnica, isto é, medidas que se caracterizam por apresentarem como resultado um escalar; por indicarem a eficiência Pareto-Koopmans; por serem calculadas através de algoritmos computacionais já existentes e de amplo conhecimento da comunidade científica e empresarial; e, por serem de fácil interpretação para uso gerencial. Medidas DEA completas somente apareceram na literatura científica recente. Duas delas destacam-se pela originalidade de sua concepção e facilidade de operacionalização: a Medida Baseada em Folgas (SBM) e a Medida Ajustada por Amplitude (RAM). Nenhum trabalho escrito em português foi encontrado na revisão bibliográfica realizada. Esse fato motivou a elaboração desta dissertação, tendo por propósito difundir tais medidas e estimular o seu emprego na comunidade empresarial brasileira, particularmente naquelas das áreas de educação e saúde. As medidas SBM e RAM são descritas e seu emprego é ilustrado com aplicação a um conjunto de 33 universidades federais brasileiras, com dados de 1994.

Palavras-chave: Eficiência Técnica, Medida Completa, DEA

ABSTRACT

This dissertation rose from a literature review relating to Data Envelopment Analysis, executed in 2001, that identified the scientific challenge of building complete measures of technical efficiency, that is, measures which present a scalar as a result, indicate Pareto-Koopmans´ efficiency, can be estimated by existing computational algorithms, and are easily interpreted for general use. Complete DEA Measures only appeared in the scientific literature recently. Two of them are highlighted for the originality in conception and ease of application: Slack Based Measure (SBM) and the Range Adjusted Measure (RAM). In the literature review process hadn't found any work written in Portuguese. This fact was the motivation for the elaboration of this dissertation that aimed to spread such measures and stimulate their use in the Brazilian entrepreneurial community, particularly, in the educational and health areas. The complete measures are described and their use is illustrated in an application to a set of 33 Brazilian Federal Universities, in 1994.

Keywords: Technical Efficiency; Complete Measure, DEA

LISTA DE ILUSTRAÇÕES E TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ART	Número total de artigos publicados
COLS	Método de Correlação por Mínimos Quadrados Ordinários Corrigidos
DEA	Análise Envoltória de Dados
DMU	Unidade Tomadora de Decisão
EffGT	Conjunto de Eficiência do Grafo da Tecnologia
EffL(U)	Conjunto de eficiência da produção
EffP(X)	Conjunto de eficiência do consumo
FORM	Número total de alunos formados
GT	Grafo da Tecnologia
INEP	Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais
IQG	Indicador de Qualidade da Graduação
IsoqL(U)	Isoquanta da produção
IsoqP(X)	Isoquanta do consumo
L(U)	Conjunto de consumo
MIP	Medida de Proporções de Ineficiência
P(X)	Conjunto de produção
PR	Produtividade
PROF	Número total de professores
RAM	Medida Ajustada por Amplitude
SBM	Medida Baseada em Folgas
SESU	Secretaria de Ensino Superior
UFB	Universidades Federais Brasileiras

LISTA DE SÍMBOLOS

$[U^0; X^0]$	um plano de operação observado específico
$\mu=[\mu_m]$	preços virtuais de produtos
$\nu=[\nu_n]$	preços virtuais de insumos
u_m	quantidade gerada do produto m
x_n	quantidade consumida do insumo n
X, Y	vetor das quantidades de insumos consumidas
U, V	vetor das quantidades de produtos geradas
X	matriz do consumo
U	matriz da produção
$[U; X]$	Plano de operação que associa o consumo X à produção U.
N	Número de insumos consumidos na operação produtiva
M	Número de produtos gerados na operação produtiva
J	Número de planos de operação observados
$[U^j; X^j]$	Um plano de operação observado qualquer
$Z=[z_j]$	vetor das variáveis de intensidade
ϕ	indicador de expansão da produção
θ	indicador de contração do consumo
$\vec{0}$	vetor de dimensão adequada cujos componentes são todos iguais a zero
$\vec{1}$	vetor de dimensão adequada cujos componentes são todos iguais a 1
E_C	medida de eficiência no consumo Debreu-Farrell
E_P	medida de eficiência na produção Debreu-Farrell
ε	variável não-arquimediana (infinitesimal)
$T=[t_m]$	vetor de quantidades t_m de folgas na produção
$S=[s_n]$	vetor de quantidades s_n de excessos no consumo
R_G	medida de eficiência Russell Grafo
w	variável indicadora do tipo de retorno de escala
τ	escore de eficiência SBM
ρ_C	escore de eficiência média no consumo

ρ_P	escore de eficiência média na produção
f	parâmetro "SBM modificada"
Γ	escore de eficiência RAM
$\overline{x}_n$	quantidade máxima observada do insumo n
$\underline{x}_n$	quantidade mínima observada do insumo n
$\overline{u}_m$	quantidade máxima observada do produto m
$\underline{u}_m$	quantidade mínima observada do produto m
R_n^-	amplitude do insumo n
R_m^+	amplitude do produto m
$\vec{1}_j$	vetor de dimensão adequada cujos componentes são todos iguais a zero, com exceção do j-ésimo componente, que é igual a 1
ξ	variável dual "SBM modificada"

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Estudos empíricos sobre produtividade e medidas de desempenho produtivo têm sido do interesse de centenas de pesquisadores em todo o mundo há séculos. Tais estudos buscam desenvolver técnicas capazes de dar suporte às tomadas de decisão na alocação dos recursos disponíveis à organização, de detectar fontes de ineficiências produtivas nas alocações realizadas, e de identificar metas eficientes a serem adotadas, considerando as restrições existentes.

A produtividade de uma organização é conceito associado às quantidades dos insumos empregados para realizar suas atividades e às quantidades de produtos gerados por essas organizações. A eficiência técnica refere-se à habilidade de evitar desperdícios, gerando tantos produtos quanto os insumos utilizados permitem e consumindo as menores quantidades de insumos necessárias para a produção.

Esses dois conceitos são a base para os estudos sobre medidas de eficiência técnica que, ao informarem a relação entre os planos de operação executados e os melhores planos de operação possíveis, em termos de produtividade, dão suporte para o estabelecimento de estratégias gerenciais voltadas para o alcance do melhor desempenho produtivo das organizações.

Nas últimas décadas, avaliações de eficiência técnica dos planos de operações de organizações produtivas vêm sendo realizadas em diversas áreas, tais como: educação, saúde, transporte e instituições financeiras. No Brasil, atualmente, muitos estudos têm sido feitos nos setores de educação e saúde. Entre eles, destacam-se as pesquisas com aplicações em cursos de graduação (LAPA e NEIVA, 1996); departamentos de ensino universitário (NUNES,1998); instituições de ensino superior (MARINHO, RESENDE e FAÇANHA, 1997); universidades federais (BELLONI, 2000); e hospitais (MARINHO E FAÇANHA, 2000; CALVO, 2002).

De acordo com Lovell (1993), para medir a eficiência técnica de um plano de operação observado, é necessário compará-lo com os planos de operação ótimos, que são aqueles planos que levam a organização a operar com a maior produtividade possível com as quantidades de insumos disponíveis.

A medida radial de eficiência técnica, proposta por Farrell (1957), impulsionou estudos na busca de uma medida capaz de atender ao conceito de eficiência

Pareto-Koopmans. Tais estudos deram origem a duas linhas de pensamento voltadas ao desenvolvimento de medidas não-paramétricas de eficiência técnica que permitem a avaliação de operações produtivas que empregam múltiplos insumos para gerar múltiplos produtos. Ambas as linhas utilizam programação matemática: uma delas concentra-se na criação de medidas radiais, enquanto que a outra, de medidas não-radiais. Dentre as medida não-radiais está a categoria de medidas completas de eficiência técnica, que se caracterizam por possuírem duas propriedades, a saber:

P.1) ser função escalar;

P.2) avaliar eficiência técnica segundo o critério de eficiência Pareto-Koopmans;

e atender a dois critérios, a saber:

C.1) utilizar algoritmos já existentes e de fácil manejo computacional; e,

C.2) fornecer resultados de fácil interpretação no meio gerencial.

Medidas completas de eficiência técnica têm sido apresentadas na literatura nos últimos anos. Duas dessas medidas são tratadas no capítulo cinco desta dissertação:

- **a Medida Baseada em Folgas (SBM)**[1] , proposta por Tone (2001) ; e,
- **a Medida Ajustada por Amplitude (RAM)**[2] , apresentada por Cooper, Park e Pastor (1999).

Essas medidas são descritas com a finalidade de mostrar que satisfazem às propriedades e critérios de uma medida completa, e aplicadas a 33 universidades federais brasileiras para ilustrar seu emprego.

1 SBM, de **S**lack **B**ased **M**easure.
2 RAM, de **R**ange **A**djusted **M**easure.

1.1 A Pesquisa

Esta dissertação é resultado de uma pesquisa que tem como objetivo identificar e descrever medidas completas de eficiência técnica. Tal pesquisa é do tipo bibliográfica e de natureza descritiva e exploratória, tendo sido realizada com a execução das seguintes atividades:

i) revisão bibliográfica sobre medidas de eficiência técnica;
ii) seleção de um elenco de medidas completas para serem tratadas detalhadamente;
iii) ilustração empírica do emprego das medidas completas selecionadas.

A relevância da dissertação, por um lado, prende-se ao fato de ela constituir-se em um referencial teórico atualizado, escrito em português, que historia a evolução das medidas de eficiência técnica e que, em particular, descreve medidas completas de eficiência técnica, com ilustração de sua aplicação em contextos produtivos que consomem múltiplos insumos na geração de múltiplos produtos. Por outro lado, esta dissertação amplia o debate sobre medidas completas de eficiência técnica e seu uso no meio gerencial, por se tratarem de medidas recentemente apresentadas. Esse debate oferece subsídios para análise das vantagens e desvantagens na escolha e no uso das diferentes medidas de eficiência técnica.

As principais limitações da pesquisa são de natureza temporal, documental bibliográfica e empírica: o tempo disponível para a conclusão do curso de mestrado limitou a revisão bibliográfica a estar concluída no final de 2001; a revisão documental concentrou-se no triênio 1999-2001; a pesquisa bibliográfica concentrou-se nas principais revistas especializadas em produtividade, eficiência técnica e DEA, publicadas em inglês; e, finalmente, a aplicação foi restrita à tecnologia produtiva adotada por Belloni (2000), a fim de possibilitar a ilustração comparativa do desempenho das medidas completas descritas nesta dissertação e da medida de eficiência aplicada por esse pesquisador.

1.2 Definições

Esta seção descreve os principais termos utilizados nesta dissertação.

PLANO DE OPERAÇÃO: associação de quantidades de insumos e quantidades de produtos envolvidos em uma operação produtiva.

PLANO DE OPERAÇÃO VIÁVEL: plano de operação cujas quantidades de produtos podem ser geradas com as quantidades de insumos disponíveis.

TECNOLOGIA DE PRODUÇÃO: é o conjunto de todos os planos de operações viáveis.

PRODUTIVIDADE: medida de desempenho produtivo de um plano de operação que compara a produção com o consumo.

EFICIÊNCIA PRODUTIVA: habilidade de escolher o plano de operação viável cuja produtividade é a maior dentre os planos de operação viáveis, sendo essa produtividade medida, em geral, em termos dos preços de mercado dos insumos e dos produtos.

EFICIÊNCIA TÉCNICA: habilidade de evitar desperdícios, gerando tantos produtos quanto os insumos utilizados permitem e consumindo as menores quantidades de insumos necessárias para a produção.

MEDIDA DE (IN)EFICIÊNCIA PRODUTIVA DO PLANO DE OPERAÇÃO: é a razão entre a produtividade desse plano e a maior produtividade entre os planos de operação viáveis.

MEDIDA DE (IN)EFICIÊNCIA TÉCNICA DO PLANO DE OPERAÇÃO: é o componente da medida de (in)eficiência produtiva que reflete a inabilidade de evitar desperdício na geração de tantos produtos quanto os insumos utilizados permitem e na utilização das menores quantidades de insumos capazes de gerar a produção desejada.

MEDIDA DE (IN)EFICIÊNCIA ALOCATIVA DO PLANO DE OPERAÇÃO: componente da medida de (in)eficiência produtiva que reflete a inabilidade de escolher o plano de operação tecnicamente eficiente mais adequado aos preços de mercado de insumos e de produtos.

MEDIDA DE (IN)EFICIÊNCIA DE ESCALA DO PLANO DE OPERAÇÃO $[U^0;X^0]$: componente da medida de (in)eficiência produtiva que reflete a impossibilidade de executar o plano de operação de maior produtividade dentre os planos de operação viáveis, e manter a escala de operação do plano $[U^0;X^0]$.

MEDIDA DE (IN)EFICIÊNCIA DE GESTÃO DO PLANO DE OPERAÇÃO: componente da medida de (in)eficiência produtiva resultante da diferença entre a ineficiência técnica e de escala.

CONCEITO PARETO-KOOPMANS DE EFICIÊNCIA TÉCNICA: o plano de operação $[U^0;X^0]$ é eficiente Pareto-Koopmans se a organização não pode aumentar a quantidade gerada de qualquer produto sem uma redução da quantidade gerada de pelo menos um outro produto ou sem aumentar a quantidade consumida de pelo menos um insumo; bem como se ela não pode reduzir a quantidade consumida de qualquer insumo sem aumentar a quantidade consumida de pelo menos outro insumo ou sem reduzir a quantidade gerada de pelo menos um produto.

MEDIDA COMPLETA DE EFICIÊNCIA TÉCNICA: medida de eficiência técnica que gera um escalar como resultado, que avalia a eficiência técnica segundo o conceito Pareto-Koopmans, que é de fácil manipulação computacional e de fácil interpretação no meio gerencial.

1.3 Estrutura da Dissertação

Neste capítulo introdutório são abordadas noções econômicas básicas associadas à eficiência técnica, bem como descritas as propriedades e critérios para uma medida de eficiência técnica ser considerada completa. Também são explicitados os objetivos, a relevância e as principais limitações da pesquisa, e uma lista dos principais termos usados na dissertação.

Uma breve revisão da literatura sobre produtividade e eficiência é apresentada no capítulo dois, que também expõe a evolução dos estudos sobre medidas de eficiência técnica e o conceito Pareto-Koopmans de eficiência técnica.

O capítulo três trata de tecnologia produtiva, com destaque às características e propriedades de maior interesse para esta dissertação. O capítulo seguinte descreve as propriedades desejáveis a uma medida de eficiência técnica e as medidas radiais e não-radiais mais tradicionais.

As medidas completas de eficiência técnica SBM e RAM, suas propriedades, critérios e problemas matemáticos são discutidos no capítulo cinco. Uma aplicação ilustrativa dessas medidas a um banco de dados de universidades federais brasileiras é apresentada no capítulo seguinte.

Esta dissertação termina com o capítulo sete que apresenta considerações finais e recomendações para continuidade da pesquisa.

2 PRODUTIVIDADE E EFICIÊNCIA

Este capítulo contempla uma breve revisão de literatura sobre produtividade e eficiência técnica; descreve a evolução dos estudos sobre medidas de eficiência técnica e apresenta o conceito de eficiência Pareto-Koopmans.

A comparação da produtividade entre organizações do mesmo ramo de atividades gera medidas relativas de suas ineficiências. Esse tipo de avaliação geralmente considera fatores internos, como o porte e a localização geográfica da organização, a sazonalidade dos insumos e dos produtos, bem como as influências do ambiente externo.

A produtividade varia conforme as diferenças nas tecnologias de produção disponíveis às organizações, na eficiência do plano de operação observado, e no ambiente em que ocorre a produção. A análise desses fatores leva à identificação de possíveis fontes de ineficiência técnica, bem como a alternativas que possibilitam o aumento da produtividade (LOVELL, 1993).

Tecnologia de produção é o conjunto de todos os planos de operações viáveis, os quais expressam relações que associam quantidades de insumos a quantidades de produtos através dos vários processos produtivos disponíveis à organização. Todavia, há organizações que, apesar de possuírem a mesma tecnologia, apresentam variações nos seus níveis de produtividade devido a diferenciais em suas habilidades de converter insumos em produtos. O capítulo três apresenta definições, axiomas e propriedades inerentes às tecnologias de produção, essenciais a esta dissertação.

É comum, em avaliações de desempenho produtivo, o uso de termos como "mais ou menos eficiente" ou "mais ou menos produtiva" relacionados às organizações avaliadas. Nesse caso, para uma melhor interpretação dos resultados do estudo da avaliação de desempenho, é importante apresentar uma breve discussão sobre os conceitos de produtividade e eficiência[3].

Na Teoria Econômica, a medida de desempenho mais tradicional é a produtividade, que compara a produção com o consumo. Dado o esperado comportamento otimizador da organização, essa medida indica que quanto maior a

[3] Um estudo mais detalhado sobre a relação eficiência versus produtividade pode ser encontrado em Coelli, Rao e Batese (1998).

produtividade, melhor o desempenho produtivo, como ocorre quando essa medida, ao ser usada na avaliação de desempenho de trabalhadores, aparece na forma de "vendas por hora trabalhada" ou "lucro por trabalhador empregado".

Essa forma simples de medir produtividade, que compara um único produto com um único insumo, é chamada convencionalmente de produtividade parcial por não considerar todos os fatores de produção. Todavia, essa forma não é bem aceita na área empresarial, uma vez que ela leva a uma interpretação incorreta por atribuir a um insumo o acréscimo produtivo que pode ter sido gerado por outro insumo não incluído na análise (COOPER, SEIFORD e TONE, 2000).

Tal deficiência da produtividade parcial é eliminada com a produtividade total dos fatores, uma medida que considera todos os insumos e todos os produtos e que corresponde à razão entre uma soma ponderada das quantidades de produtos geradas e uma soma ponderada das quantidades de insumos consumidas. Todavia, surgem problemas não somente quanto aos critérios de escolha de quais insumos e produtos devam ser incluídos na avaliação da produtividade total dos fatores, mas principalmente, quanto aos pesos a empregar no processo de agregação.

Sobre esses dois problemas, Knight (1933, apud LOVELL, 1993, p. 4) mostra que, se todos os produtos e insumos envolvidos na produção fossem incluídos na medida de produtividade total dos fatores, essa medida seria sempre igual a 1, quaisquer que fossem as quantidades de produtos gerados e de insumos consumidos (desde que algumas delas sejam diferentes de zero). Diante disso, Knight propõe a redefinição de produtividade total dos fatores como a razão entre a produção útil e o consumo útil, como mostra a equação (2.1), na qual os preços virtuais da agregação μ_m e v_n representam, respectivamente, as utilidades dos produtos e dos insumos relevantes para a organização.

$$PR = \sum \mu_m u_m / \sum v_n x_n \qquad (2.1)$$

onde:

$u_m \geq 0$ - quantidade gerada do produto m, com $\sum u_m > 0$

$x_n \geq 0$ - quantidade consumida do insumo n, com $\sum x_n > 0$

$\mu_m > 0$ - utilidade do produto m na composição da produção útil;

$v_n > 0$ - utilidade do insumo n na composição do consumo útil.

Knight sugere que, na prática, os preços virtuais μ_m e v_n sejam representados pelos respectivos preços de mercado. Porém, há dificuldades no emprego de (2.1) para medir a produtividade total dos fatores quando o preço de algum produto ou insumo útil não existe ou não é confiável.

Quanto à eficiência técnica, sua definição original diz respeito à comparação entre a produtividade do plano de operação executado por uma organização e a máxima produtividade que essa organização pode alcançar. Para operações que envolvem o emprego de múltiplos insumos na geração de múltiplos produtos, a definição atual de eficiência tem origem nos trabalhos de Vilfredo Pareto, que propõe o bem-estar geral como critério para o julgamento de qualquer política social. Partindo do critério de utilidade, Pareto defendeu que uma política social deveria ser adotada se causasse alguma melhoria ao bem-estar de um indivíduo, sem reduzir o bem-estar de algum outro indivíduo.

Koopmans (1951) adota essa concepção de Pareto em seus estudos sobre eficiência na alocação de recursos produtivos quando define o conceito de eficiência técnica do plano de operação executado por uma organização como a condição em que a organização não pode aumentar a quantidade gerada de qualquer produto sem uma redução da quantidade gerada de pelo menos um outro produto ou sem aumentar a quantidade consumida de pelo menos um insumo, nem pode reduzir a quantidade consumida de qualquer insumo sem aumentar a quantidade consumida de pelo menos outro insumo ou sem reduzir a quantidade gerada de pelo menos um produto. No entanto, cabe anotar que os estudos de Pareto e Koopmans concentraram-se mais nos aspectos conceituais do que empíricos em torno da medição de eficiência[4].

A análise da eficiência de uma organização pública ou privada, de fins lucrativos ou não, pode ser feita sob dois pontos de vista: da eficiência alocativa e da eficiência técnica. A eficiência técnica refere-se à habilidade de evitar o desperdício na geração de tantos produtos quanto os insumos utilizados permitirem ou na mínima utilização dos insumos necessários para a produção. Como a análise da eficiência técnica exclui o fator preço, costuma-se, no meio gerencial, atribuir a ineficiência técnica detectada integralmente ao gestor que escolheu o plano de operação observado, e não ao mercado. A eficiência alocativa, por sua vez, refere-

[4] Nesta dissertação, o conceito apresentado por Koopmans é tratado como "eficiência Pareto-Koopmans"

se à habilidade da organização selecionar o plano de operação tecnicamente eficiente, de maior produtividade possível, considerando, como utilidade, os preços de mercado dos insumos e dos produtos envolvidos na operação produtiva.

A avaliação da eficiência técnica pode ser orientada para o crescimento da produção, para a economia de recursos ou para alguma combinação desses dois objetivos. Em todos os casos, o objetivo é obter ganhos de produtividade através da eliminação das fontes de ineficiência.

Debreu (1951) estabelece a primeira medida empírica de eficiência técnica moderna ao conceituar o seu "coeficiente de utilização de recursos": uma medida radial, orientada para o uso de insumos que calcula a maior redução equiproporcional que pode ser dada aos insumos, sem reduzir as quantidades geradas de produtos. Entretanto, essa não é uma medida completa, pois, mesmo após a máxima contração equiproporcional do consumo, pode ser que a operação produtiva ainda continue com excesso de algum insumo além do mínimo necessário para a produção gerada. Dessa forma, um plano de operação pode ser considerado eficiente no consumo, com base na medida radial de Debreu, quando ele é realmente ineficiente de acordo com o conceito Pareto-Koopmans, pois nele há algum insumo em excesso.

A medida radial de eficiência técnica proposta por Debreu também pode ser analisada seguindo de perto o conceito de função distância de Shephard (1953), que mede a distância radial do plano de operação observado à fronteira de eficiência da produção. De acordo com esse conceito, é zero a distância de um plano eficiente a essa fronteira, enquanto que a distância de todo plano ineficiente é positiva; além disso, quanto maior a distância, maior a ineficiência do plano correspondente.

Em qualquer caso, as medidas de eficiência técnica apresentadas nas últimas décadas comparam a produtividade observada com a produtividade máxima, quando consideradas sob o conceito de Knight, expresso na equação (2.1).

Até a primeira metade do século XX, a Teoria Econômica concentrava seus estudos nas organizações "racionais", cujos planos de operação faziam parte da fronteira de produção eficiente; assim, os estudos não abordavam a ineficiência e suas causas, pois todos os planos de operação observados eram considerados eficientes. Entretanto, o conceito de função distância de Shephard e a medida radial de Debreu fizeram com que a Teoria Econômica começasse a interpretar a função de produção, não apenas como uma relação eficiente entre quantidades de insumos e produtos, mas como uma fronteira de eficiência da tecnologia produtiva. A partir dessa época, a tecnologia produtiva passou a ser considerada um conjunto composto de dois tipos de planos de operação viáveis: os planos eficientes, definidos pela função de produção e que formam a fronteira de eficiência da tecnologia de produção, e os demais planos de operação viáveis, obviamente ineficientes, que formam o interior da tecnologia.

Inspirado nos trabalhos de Debreu e Koopmans, Farrell (1957) mostra que o "coeficiente de utilização de recursos" de Debreu poderia ser aplicado com o objetivo de avaliar a eficiência do setor agrícola dos Estados Unidos, construindo, para esse setor, uma fronteira de eficiência empírica, sem estabelecer, *a priori,* a sua forma funcional, uma exigência dos métodos paramétricos tradicionais.

Farrell (1957) define uma medida de eficiência produtiva[5] e mostra como decompô-la em seus componentes técnico e alocativo. A medida de Farrell, como a de Debreu, é radial e voltada para o consumo, pois busca calcular a máxima contração equiproporcional possível de todos os insumos, mantendo-se inalterada a produção observada. Nessa medida, um escore unitário indica que o plano de operação observado é eficiente do ponto de vista técnico, pois não é possível nenhuma redução equiproporcional de insumos sem redução paralela da produção, enquanto que um escore menor que 1 indica o grau de ineficiência desse plano, isto é, a proporção entre a produtividade do plano executado e a produtividade máxima que a organização pode alcançar.

A medida de Farrell pode ser transformada facilmente para calcular a máxima expansão equiproporcional da produção, mantendo inalterado o consumo observado. Também nesse caso um escore igual a 1 indica que o plano de operação observado é eficiente, enquanto que um escore maior que 1 indica que o plano observado é ineficiente, pois a organização poderia expandir sua produção e operar com uma produtividade maior.

De acordo com Førsund e Sarafoglou (2000), a contribuição de Farrell foi pioneira em três aspectos, pois sua medida permite: (1) avaliar a eficiência técnica por meio de uma contração radial uniforme; (2) construir uma fronteira de eficiência técnica linear por partes, que envelopa os planos de operação observados, de forma altamente conservadora, visto que essa fronteira empírica fica o mais próximo

[5] Também chamada de eficiência de custo. Nesta dissertação, como em grande parte da literatura, ela será chamada de medida de eficiência Debreu-Farrell.

possível das observações; e (3) calcular tal fronteira usando sistemas de equações lineares.

Os resultados dos estudos de Farrell contribuíram para o desenvolvimento de métodos paramétricos e não-paramétricos de estimação de fronteiras de produção. Aigner e Chu (1968) propõem o uso da função de Cobb-Douglas como padrão para estimação da fronteira de eficiência. Essa proposta foi a primeira forma paramétrica alternativa às estimações de funções médias de produção por meio de econometria. Richmond (1974) também utiliza econometria para desenvolver o método de estimação de fronteiras paramétricas de eficiência chamado Mínimos Quadrados Ordinários Corrigidos (COLS)[6].

Partindo da preocupação de Farrell sobre certos problemas estatísticos da sua medida de eficiência, Afriat (1972) desenvolve um procedimento paramétrico para a estimação de fronteiras estocásticas. Nesse procedimento, a distância entre o plano de operação considerado ineficiente e a fronteira de produção é decomposta em dois elementos, um que representa o ruído estatístico, fruto de oscilações aleatórias, e outro, que representa a própria ineficiência do plano. As medidas paramétricas determinísticas e estocásticas são restritas aos sistemas produtivos de um único produto, enquanto que as medidas não-paramétricas determinísticas são adequadas a sistemas produtivos de múltiplos produtos e múltiplos insumos. Com o objetivo de estudar processos tecnológicos mais complexos, esta dissertação contempla somente as medidas não-paramétricas determinísticas.

A maioria dos estudos baseados na idéia original de Farrell tem como objetivo aprimorar a sua medida de eficiência, através de diferentes meios, a fim de chegar a uma medida adequada ao conceito de eficiência Pareto-Koopmans, uma vez que um plano de operação pode ser considerado eficiente segundo a medida de eficiência Debreu-Farrell sem ser eficiente segundo o conceito Pareto-Koopmans[7].

O problema teórico da medida de eficiência Debreu-Farrell é mostrado na Ilustração 2.1, que possibilita analisar eficiência técnica orientada para a diminuição do consumo em operações que geram um único produto[8]. Nessa ilustração, os produtores A, B, C, D e E geram uma unidade de um único produto empregando

[6] Do inglês *Corrected Ordinary Least Squares*

[7] Todavia, todo plano de operação observado Pareto-Koopmans eficiente é corretamente considerado eficiente quando avaliado pela medida Debreu-Farrell.

[8] Essa análise supõe que a tecnologia produtiva exibe retorno de escala constante e descarte forte de insumos e produtos, nos termos definidos com maior precisão no capítulo três e adotados na maioria dos livros sobre eficiência produtiva.

dois insumos com quantidades x_1 e x_2. O conjunto L é formado por todos os planos de operação viáveis, isto é, das combinações de quantidades de insumos [x_1; x_2] capazes de gerar uma unidade do produto. A linha IsoqL que limita esse conjunto a sudoeste, é chamada isoquanta, sendo formada por todos os planos de operações capazes de gerar uma unidade de produto empregando as menores quantidades de insumos, para cada proporção de insumo x_1:x_2. O segmento CD da isoquanta é especial, pois seus planos de operação têm uma característica específica: a diminuição da quantidade de qualquer insumo inviabiliza a geração de uma unidade do produto, quer quando a quantidade do outro insumo é reduzida, quer quando permanece inalterada. Por essa razão, o segmento CD é chamado fronteira de eficiência técnica, segundo o conceito Pareto-Koopmans, e costuma ser designado por EffL.

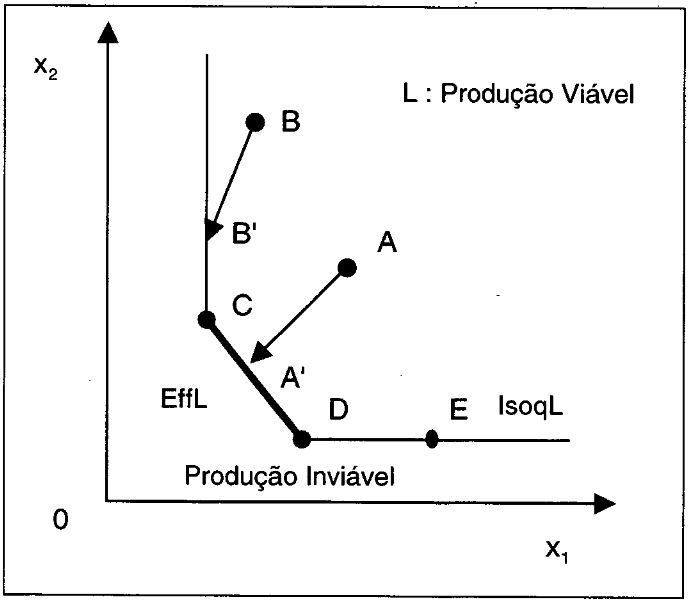

Ilustração 2.1: Eficiência técnica

Observe-se, nessa ilustração, que a medida de eficiência Debreu-Farrell é inadequada para verificar se um plano de operação observado é eficiente segundo o conceito Pareto-Koopmans, pois:

i) os planos de operação A e B são ineficientes tecnicamente, pois há planos de operação que geram uma unidade de produto consumindo menores quantidades de insumos;

ii) uma redução equiproporcional das quantidades dos insumos identifica como metas eficientes os planos A' e B' da isoquanta, que são considerados eficientes de acordo com a medida Debreu-Farrell;

iii) desses dois planos, somente A' é eficiente de acordo com o conceito Pareto-Koopmans, pois ele está na fronteira de eficiência CD enquanto que B' não está; vê-se claramente que o plano B', relativamente ao plano C, consome o insumo x_2 em maior quantidade do que o necessário para gerar uma unidade do produto;

iv) os planos de operação C, D e E são identificados como eficientes quando avaliados como a medida Debreu-Farrell, por pertencerem à isoquanta;

v) todavia, somente os planos de operação C e D são eficientes de acordo com o conceito Pareto-Koopmans, pois apenas estes pertencem à fronteira de eficiência técnica CD;

vi) claramente, o plano E não é eficiente de acordo com o conceito Pareto-Koopmans, apesar de ter sido identificado como eficiente pela medida Debreu-Farrell, uma vez que esse plano consome o insumo x_1 em excesso, quando comparado com o plano D.

Por conseguinte, a medida Debreu-Farrell não é completa, pois ela não reflete todas as ineficiências técnicas dos planos de operação observados, apesar de atender a uma das propriedades e aos dois critérios exigidos para uma medida de eficiência técnica ser considerada completa, pois ela: (1) gera um resultado escalar; (2) pode ser calculada pelo algoritmo Simplex; e, (3) tem uma fácil interpretação gerencial, por indicar a maior contração equiproporcional que o consumo pode ter sem que a produção seja prejudicada.

Além disso, a medida Debreu-Farrell original apresenta outras três deficiências: (1) aplica-se somente a tecnologias com retorno de escala constante e descarte forte de insumo e produto; (2) não permite lidar simultaneamente com múltiplos produtos e múltiplos insumos; e, (3) as ineficiências do consumo e da produção só podem ser avaliadas separadamente.

Todavia, a medida de eficiência técnica Debreu-Farrell deu origem à maioria dos estudos sobre medidas de eficiência não-paramétricas realizados até hoje. Os esforços que os pesquisadores vêm desenvolvendo desde 1957 para eliminação das deficiências dessa medida deram origem à abordagem Análise Envoltória de Dados

(DEA)[9], que estuda a produtividade e a eficiência técnica de organizações que empregam múltiplos insumos para gerar múltiplos produtos.

No final da década de 70 já estavam consolidadas duas linhas de pesquisa que empregam programação matemática para construir fronteiras não-paramétricas de eficiência técnica:

- uma, originária do trabalho de Charnes, Cooper e Rhodes (1978), que estuda medidas radiais e que introduziu o termo Análise Envoltória de Dados na literatura científica, e,
- outra, orientada pelo trabalho de Färe e Lovell (1978), que estuda medidas não-radiais, a partir da medida denominada Russell.

Apesar de aparentemente conflitantes, essas duas linhas desenvolveram-se de forma complementar e congruente na busca de medidas completas de eficiência técnica.

Charnes, Cooper e Rhodes (1979) aprimoram as medidas radiais baseadas na medida de eficiência Debreu-Farrell impondo restrições aos preços virtuais no emprego de (2.1) para calcular a produtividade. Embora essa modificação permita atender ao conceito Pareto-Koopmans de eficiência, os escores de eficiência obtidos não oferecem uma interpretação gerencial direta.

Färe, Grosskopf e Lovell (1985) corrigem a falha da medida Russell de não considerar todas as ineficiências técnicas do plano de operação observado, apresentando uma nova medida não-radial chamada medida Russell Grafo, que permite a avaliação conjunta de todas as ineficiências do consumo e da produção da operação produtiva observada. Embora a medida Russell Grafo avalie a eficiência Pareto-Koopmans, ela é de difícil cálculo e o escore de eficiência obtido não é de interpretação direta.

Outra medida não-radial adequada a tecnologias produtivas complexas e que permite a avaliação conjunta de todas as ineficiências do consumo e da produção é a medida Aditiva apresentada por Charnes *et al* (1985). Trata-se de uma medida de fácil cálculo, baseada em excessos no consumo e folgas na produção, mas que também não fornece um resultado adequado à tomada de decisão e interpretação no meio gerencial.

[9] Do inglês *Data Envelopment Analysis*

O processo de aprimoramento das medidas de eficiência técnica é constante. Uma versão recente da medida não-radial Russell Grafo, apresentada por Pastor, Ruiz e Sirvent (1999), resolve grande parte das dificuldades computacionais existentes no seu cálculo e na interpretação do resultado da medida Russell Grafo.

Uma revisão mais detalhada das medidas de eficiência técnica acima mencionadas é apresentada no capítulo quatro desta dissertação. Todavia, essas medidas não são completas.

Nos últimos anos do século XX apareceram na literatura científica as primeiras propostas de medidas completas de eficiência técnica. Duas delas, a medida SBM e a medida RAM são aperfeiçoamentos das medidas tradicionais tratadas no capítulo quatro. As medidas SBM e RAM são objeto desta dissertação e estão detalhadas separadamente no capítulo cinco. O tratamento dessas medidas requer a apresentação dos conjuntos da tecnologia produtiva, suas propriedades e axiomas, descritos no capítulo que segue.

3 TECNOLOGIA PRODUTIVA

Este capítulo aborda as características e propriedades da tecnologia produtiva que são de maior interesse para esta dissertação.

O conceito seminal da Teoria da Produção[10] é o plano de operação, que corresponde a uma associação das quantidades de insumos disponíveis com as quantidades de produtos desejadas. Um plano de operação é denominado viável, do ponto de vista produtivo, quando as quantidades de produtos desejadas podem ser geradas com as quantidades de insumos disponíveis. O conjunto de todos os planos de operação viáveis chama-se tecnologia produtiva.

Em geral, todo produtor não conhece a tecnologia produtiva com que opera, pois, na prática, ele só conhece aqueles planos de operação que foram observados, posto que eles foram realmente executados. Por essa razão, os estudos sobre produtividade e eficiência produtiva costumam empregar tecnologias empíricas como aproximações das tecnologias reais. Essas tecnologias empíricas são representadas por modelos matemáticos construídos a partir de planos de operação observados.

Considere um produtor que usa N tipos de insumos para gerar M tipos de produtos. Represente-se cada plano de operação da tecnologia desse produtor pelo vetor $[\ U;X\ ]$, no qual $U = [\ u_m\ ] \in \Re_+^M$ é o sub-vetor que expressa as quantidades de produtos que o produtor deseja gerar com as quantidades disponíveis de insumos, representadas no sub-vetor $X=[\ x_n\ ] \in \Re_+^N$.

Três são as formas matemáticas de representar uma tecnologia produtiva, a partir dos planos de operação viáveis $[\ U;X\ ]$:

- O <u>conjunto de consumo</u> L(U), cujos componentes $X=[\ x_n\ ] \in \Re_+^N$ geram a produção $U \in \Re_+^M$. Esse conjunto é descrito por:

$$L(U) = \{\ X \mid [\ U;X\ ] \text{ é um plano de operação viável}\ \} \qquad \forall\ U \in \Re_+^M.$$

[10] Varian (1992) é referência completa para o estudo de Teoria da Produção.

- O <u>conjunto da produção</u> P(X), cujos componentes $U = [\, u_m \,] \in \Re_+^M$ são geráveis com o consumo $X \in \Re_+^N$. Esse conjunto é descrito por:

$$P(X) = \{\, U \mid [\, U;X \,] \text{ é um plano de operação viável} \,\} \qquad \forall\, X \in \Re_+^N.$$

- O <u>grafo da tecnologia</u> GT, cujos componentes [U;X] são planos de operação viáveis. Esse conjunto é descrito por:

$$GT = \{\, [\, U;X \,] \mid [\, U;X \,] \text{ é um plano de operação viável} \,\} \qquad \forall\, [\, U;\, X] \in \Re_+^{N+M}$$

É fácil provar que $[\, U;X] \in GT \Leftrightarrow U \in P(X) \Leftrightarrow X \in L(U)$.

Apesar de serem alternativos para representarem tecnologias produtivas, esses três conjuntos são empregados para estudar diferentes tipos de problemas. Por exemplo,

- O conjunto de consumo L(U) é mais adequado para escolher o consumo X de menor custo na geração da produção desejada U ;

- O conjunto de produção P(X) é mais adequado para escolher a produção U que gera a maior receita com o consumo X ;

- O grafo da tecnologia GT é mais adequado para escolher o plano de operação viável [U;X] que otimiza o lucro (global, marginal ou médio).

Cinco subconjuntos da tecnologia produtiva são de especial interesse nos estudos de produtividade e eficiência técnica, uma vez que eles permitem o estudo de Fronteiras de Eficiência Técnica[11]. Tais subconjuntos são[12]:

---

[11] Färe, Grosskopf e Lovell (1994) é referência completa para os estudos de Fronteiras de Eficiência Técnica.

[12] Considere os vetores $A = [\, a_n \,]$ e $B = [\, b_n \,]$ de mesma dimensão. $A = B$ indica que $a_n = b_n$, para todo n. $A > B$ indica que $a_n > b_n$ para todo n. $A \geqq B$ indica que $a_n \geq b_n$, para todo n. $A \geq B$ indica que $A \geqq B$, mas que $A \neq B$.

- A <u>isoquanta da produção U</u>, designada por IsoqL(U) e definida por

$$\text{IsoqL}(U) = \{X \mid X \in L(U);\ \theta X \notin L(U),\ 0<\theta<1\} \qquad \forall\, U \in \Re_+^M.$$

- A <u>isoquanta do consumo X</u>, designada por IsoqP(X) e definida por:

$$\text{IsoqP}(X) = \{U \mid U \in P(X);\ \phi U \notin P(X),\ \phi>1\} \qquad \forall\, X \in \Re_+^N.$$

- O <u>conjunto de eficiência da produção U</u>, designado por EffL(U) e definido por

$$\text{EffL}(U) = \{X \mid X \in L(U);\ Y \notin L(U),\ 0 \le Y \le X\} \qquad \forall\, U \in \Re_+^M.$$

- O <u>conjunto de eficiência do consumo X</u>, designado por EffP(X) e definido por

$$\text{EffP}(X) = \{U \mid \mid U \in P(X);\ V \notin P(X),\ V \ge U\} \qquad \forall\, X \in \Re_+^N.$$

- O <u>conjunto de eficiência do grafo da tecnologia</u> GT, designado por EffGT e definido por

$$\text{EffGT} = \{[U;X] \mid [U;X] \in GT;\ [V;Y] \notin GT,\ 0 \leqq Y \leqq X,\ V \geqq U;\ [V;Y] \neq [U;X]\}.$$

A isoquanta IsoqL(U) também é chamada de fronteira de eficiência Debreu-Farrell da produção U. A isoquanta IsoqP(X), de fronteira de eficiência Debreu-Farrell do consumo X. O conjunto de eficiência EffL(U), de fronteira de eficiência da produção U. O conjunto de eficiência EffP(X), de fronteira de eficiência do consumo X. E o conjunto de eficiência EffGT, de fronteira de eficiência Pareto-Koopmans.

Não é qualquer conjunto de vetores $[\,U;X\,] \in \Re_+^{N+M}$ que pode representar uma tecnologia produtiva. Para tal, devem ser satisfeitos certos axiomas de natureza econômica; Shephard (1953), Varian (1992) e Färe, Grosskopf e Lovell (1994) discutem detalhadamente tais axiomas. Cinco axiomas e quatro propriedades são comumente assumidos na maioria dos estudos sobre produtividade e eficiência produtiva.

Os axiomas são:

A.1) $[\vec{0};X] \in GT \qquad \forall\, X \in \Re_+^N$

que modela a inatividade operacional, pois permite ao produtor utilizar seus insumos e não gerar qualquer quantidade de produto.

A.2) GT é limitado $\qquad \forall\, X \in \Re_+^N$

que modela a escassez econômica, pois não permite ao produtor gerar quantidades infinitas de produtos consumindo quantidades finitas de insumos.

A.3) $[U;\vec{0}] \in GT \Rightarrow U = \vec{0}$

que modela a necessidade de algum insumo ser consumido em quantidade positiva para viabilizar a geração de qualquer produto em quantidade positiva.

A.4) $P(X)$ é limitado e fechado superiormente $\qquad \forall\, X \in \Re_+^N$

que assegura a existência da isoquanta do consumo X e, portanto, da fronteira de eficiência Debreu-Farrell do consumo X.

A.5) $L(U)$ é limitado e fechado inferiormente $\qquad \forall\, U \in \Re_+^M$

que assegura a existência da isoquanta da produção U e, portanto, da fronteira de eficiência Debreu-Farrell da produção U.

As propriedades da tecnologia são:

PT.1) $[U;X] \in GT$ e $0 \le V \le U \Rightarrow [V;X] \in GT$

que modela o descarte livre de produtos, pois assegura ao produtor que executou o plano de operação [U; X] gerar com X qualquer produção inferior a U.

PT.2) $[U;X] \in GT$ e $Y \ge X \Rightarrow [U;Y] \in GT$

que modela o descarte livre de insumos, pois assegura ao produtor que executou o plano de operação [U;X] produzir U com qualquer consumo maior que X.

PT.3) $\lambda GT = GT \qquad \forall\ \lambda > 0$

que modela retornos de escala constantes, pois assegura a viabilidade de aumentar (diminuir) equiproporcionalmente as quantidades produzidas desde que também sejam aumentadas (diminuídas) equiproporcionalmente as quantidades de insumos consumidas.

PT.4) $[\,U;X\,]$ e $[\,V;Y\,] \in GT \Rightarrow \lambda[\,U;X\,] + (1-\lambda)\,[\,V;Y\,] \in GT \quad \forall\ 0 \leq \lambda \leq 1$

que modela a convexidade da produção, permitindo que o produtor combine operações produtivas viáveis.

Axiomas e propriedades alternativos e complementares podem ser assumidos na construção de modelos matemáticos da tecnologia produtiva, de modo que os modelos criados sejam mais próximos das tecnologias produtivas reais. Färe, Grosskopf e Lovell (1994) abordam tais axiomas e propriedades. Dentre esses destacam-se os seguintes:

A.6) GT é um conjunto compacto

que garante a existência do conjunto de eficiência da tecnologia produtiva EffGT e, portanto, assegura a existência da fronteira de eficiência Pareto-Koopmans.

PT.1.a) $[\,U;X\,] \in GT$ e $\lambda \geq 1 \Rightarrow [\,U;\lambda X\,] \in GT$

que modela o descarte fraco de insumos ao garantir ao executor do plano de operação [U;X], que aumentos (equiproporcionais) do consumo X não inviabilizam a geração de uma produção U.

PT.2.a) $[\,U;X\,] \in GT$ e $0 < \lambda \leq 1 \Rightarrow [\,\lambda U;X\,] \in GT$

que modela o descarte fraco de produtos ao garantir ao executor do plano de operação [U;X], que toda redução (equiproporcional) da produção U é viável com o consumo X.

PT.3.a) $\lambda GT \subseteq GT$ para todo $0 < \lambda \leq 1$

que modela retorno de escala não-crescente, pois assegura a viabilidade de contrações de planos de operação viáveis.

PT.3.b) $\delta GT \subseteq GT$ para todo $\delta \geq 1$

que modela retorno de escala não-decrescente, pois assegura a viabilidade de expansões de planos de operação viáveis.

PT.3.c)

$\lambda GT \subseteq GT$ para $0 < \lambda_0 \leq \lambda \leq 1$ e $\delta GT \subseteq GT$ para $1 \leq \delta \leq \delta_0$ com $\delta_0 > 1$ e finito

que modela retorno de escala variável, mais precisamente, retorno não-decrescente, em uma parte da tecnologia, e de retorno não-crescente, em outra parte.

3.1 Tecnologia Empírica Linear por Partes

Sejam J planos de operação observados [$U^j;X^j$] pertencentes a uma mesma tecnologia produtiva, com:

$U^j = [\, u_{jm} \,] \in \Re_+^M$ e $X^j = [\, x_{jn} \,] \in \Re_+^N$, $\quad \forall\ j = 1,2,\ldots,J;$

$\sum u_{jm} > 0 \quad \forall\ m = 1,2,\ldots,M;$

$\sum x_{jn} > 0 \quad \forall\ n = 1,2,\ldots,N;$

$\sum u_{jm} > 0$ e $\sum x_{jn} > 0 \quad \forall\ j = 1,2,\ldots,J.$

Seja a matriz $\mathbf{U} = \{U^j\} = \{u_{jm}\}$ de dimensão JxM e a matriz $\mathbf{X} = \{X^j\} = \{x_{jn}\}$ de dimensão JxN. Nesse sentido, o conjunto

$$GTE = \{[\, U;X \,] \mid X \geqq Z\mathbf{X}\ ;\ U \leqq Z\mathbf{U},\ Z.\vec{1} = 1,\ Z \in \Re_+^J\ \}$$

é uma tecnologia empírica que modela a tecnologia produtiva que gerou os J planos de operação observados [U^j; X^j], quando assumidas as propriedades de retorno de escala variável, de descarte forte de insumos e de descarte forte de produtos. Anote-se, para uso futuro, que GTE pode ser representado alternativamente pelas formulações matemáticas abaixo:

$$GTE = \{[U;X] \mid Z\mathbf{X} + S = X;\ U+T = Z\mathbf{U};\ Z.\vec{1}=1,\ Z \in \Re^{J}_{+}\ S \in \Re^{N}_{+};\ T \in \Re^{M}_{+};\};$$

$$PE(X^0) = \{U \mid Z\mathbf{X} \leqq X^0;\ U \leqq Z\mathbf{U};\ Z.\vec{1} = 1,\ Z \in \Re^{J}_{+}\} \qquad \forall\ X^0 \in \Re^{N}_{+};$$

$$PE(X^0) = \{U \mid Z\mathbf{X}+S=X^0;\ U+T = Z\mathbf{U};\ Z.\vec{1}=1,\ Z \in \Re^{J}_{+};\ S \in \Re^{N}_{+};\ T \in \Re^{M}_{+}\} \quad \forall\ X^0 \in \Re^{N}_{+};$$

$$LE(U^0) = \{X \mid Z\mathbf{U} \geqq U^0;\ Z\mathbf{X} \leqq X;\ Z.\vec{1} = 1,\ Z \in \Re^{J}_{+}\} \qquad \forall\ U^0 \in \Re^{M}_{+};$$

$$LE(U^0) = \{X \mid Z\mathbf{U} - T = U^0; Z\mathbf{X} + S = X;\ Z.\vec{1}=1,\ Z \in \Re^{J}_{+};\ S \in \Re^{N}_{+};\ T \in \Re^{M}_{+}\} \ \forall\ U^0 \in \Re^{M}_{+}.$$

Nesse contexto,

$$IsoqPE(X^0) = \{U \mid U \in P(X^0);\ \phi U \notin PE(X^0),\ \phi > 1\}, \qquad \forall\ X^0 \in \Re^{N}_{+}$$

$$IsoqLE(U^0) = \{X \mid X \in L(U^0);\ \theta X \notin LE(U^0),\ 0 < \theta < 1\}, \qquad \forall\ U^0 \in \Re^{M}_{+}$$

$$EffPE(X^0) = \{U \mid U \in P(X^0);\ V \notin PE(X^0),\ V \geq U\}, \qquad \forall\ X^0 \in \Re^{N}_{+}$$

$$EffLE(U^0) = \{X \mid X \in L(U^0);\ Y \notin LE(U^0),\ 0 \leq Y \leq X\}, \qquad \forall\ U^0 \in \Re^{M}_{+}$$

$$EffGTE = \{[U;X] \mid [V;Y] \notin GTE,\ V \geqq U,\ 0 \leqq Y \leqq X;\ [V;Y] \neq [U;X]\}$$

Färe, Grosskopf e Lovell (1994) provam a existência dos cinco conjuntos descritos acima. Assim sendo, o plano de operação observado [$U^0;X^0$] é dito <u>empiricamente eficiente</u>:

- <u>na produção de U^0 segundo Debreu-Farrell</u>, quando $U^0 \in IsoqPE(X^0)$, isto é, quando não existir $\phi > 1$ tal que $\phi U^0 \in IsoqPE(X^0)$;

- <u>no consumo de X^0 segundo Debreu-Farrell</u>, quando $X^0 \in IsoqLE(U^0)$, isto é, quando não existir $0 < \theta < 1$ tal que $\theta X^0 \in IsoqLE(U^0)$;

- <u>na produção de U^0</u>, quando $U^0 \in EffPE(X^0)$, isto é, quando não existir $U \geqq U^0$, $U \neq U^0$ tal que $U \in PE(X^0)$;

- no consumo de X^0, quando $X^0 \in EffLE(U^0)$, isto é, quando não existir $0 \leq X \leqq X^0$, $X \neq X^0$ tal que $X \in LE(U^0)$;

- segundo Pareto-Koopmans,quando $[U^0; X^0] \in EffGTE$, isto é, quando não existir $[U;X] \in GTE$ tal que $[U;X] \neq [U^0;X^0]$ $U \geqq U^0$, $X \leqq X^0$.

Färe, Grosskopf e Lovell (1994) descrevem outros tipos de tecnologias empíricas lineares por partes, por exemplo:

- $GTE_1 = \{[U;X] \mid X \geqq Z\mathbf{X}; U \leqq Z\mathbf{U}, Z \in \Re_+^J\}$

que corresponde a uma tecnologia empírica linear por partes que exibe retorno constante de escala e descarte forte de insumos e produtos.

- $GTE_2 = \{[U;X] \mid X \geqq ZX; U \leqq ZU, Z.\vec{1} \leq 1, Z \in \Re_+^J\}$

que corresponde a uma tecnologia empírica linear por partes que exibe retorno não-crescente de escala e descarte forte de insumos e produtos.

- $GTE_3 = \{[U;X] \mid X \geqq ZX; U \leqq ZU, Z.\vec{1} \geq 1, Z \in \Re_+^J\}$

que corresponde a uma tecnologia empírica linear por partes que exibe retorno não-decrescente de escala e descarte forte de insumos e produtos.

Essas três tecnologias não são apresentadas com mais detalhes nesta dissertação, uma vez que o estudo de medidas completas de eficiência técnica não depende do tipo de tecnologia empírica linear por partes empregada e que a ilustração foi concretizada com uma tecnologia de retornos variáveis e descarte forte de insumos e produtos.

4 MEDIDAS DE EFICIÊNCIA TÉCNICA

Este capítulo descreve dois grupos de medidas não-paramétricas de eficiência técnica: as medidas radiais e as medidas não-radiais mais tradicionais. Na primeira seção são tratadas as medida radiais Debreu-Farrell e as medidas CCR e BCC, em suas versões Seminal e Básica. Na segunda, as medidas não-radiais Aditiva e Russell.

De acordo com a literatura pesquisada, uma medida de eficiência técnica bem definida deve atender, do ponto de vista teórico, a sete propriedades e, do ponto de vista prático, a dois critérios. As propriedades são:

P.1) ser função escalar, de modo a permitir comparar planos de operação observados;

P.2) Indicar como eficiente os planos de operação que satisfaçam ao conceito Pareto-Koopmans de eficiência;

P.3) resultar um escore cuja interpretação seja compatível com os resultados das demais medidas de eficiência;

P.4) ser invariante no emprego de diferentes unidades de medida dos insumos e produtos considerados na avaliação;

P.5) ser fortemente monotônica nos insumos e nos produtos. De acordo com Cooper e Pastor (1995), essa propriedade é de difícil atendimento teórico e prático e por isso, alguns autores consideram satisfatório exigir apenas monotonicidade fraca;

P.6) ser homogênea de grau –1 para insumo e de grau +1 para produtos;

P.7) Ser invariante na translação de modo que a uma medida possa manipular quantidades positivas ou negativas de produtos e insumos e ser aplicada em avaliação de planos de operação que têm como produtos, variáveis que podem assumir valores negativos como "perdas" ou "lucros".

Os critérios são:

C.1) ser calculada com o emprego de algoritmos matemáticos e computacionais de conhecimento e uso difundido no meio empresarial; e,

C.2) ser de fácil interpretação gerencial.

O atendimento simultâneo dessas propriedades e critérios é muito difícil. Por essa razão, quase toda medida existente deixa de atender a algum desses requisitos. Em geral, a propriedade de avaliação segundo o conceito de eficiência Pareto-Koopmans tem se mostrado antagônica aos dois critérios operacionais.

4.1 Medidas Radiais de Eficiência Técnica

As medidas radiais de eficiência técnica do plano de operação observado $[U^0;X^0]$ fornecem a contração (expansão) equiproporcional máxima do consumo (produção) que o produtor pode realizar, mantendo inalterada a produção (consumo). Propostas inicialmente por Debreu (1951) e Farrell (1957), essas medidas receberam maior atenção a partir de 1978 quando estudiosos da área de pesquisa operacional desenvolveram um problema de programação linear que permite o cálculo da eficiência técnica para tecnologias com múltiplos produtos e múltiplos insumos, mesmo quando os preços não estão disponíveis ou não são confiáveis.

Dado o plano de operação observado $[U^0;X^0]$, a medida de eficiência técnica orientada para o consumo E_C fornece a contração equiproporcional máxima possível do consumo X^0 capaz de gerar a produção U^0. A representação matemática dessa medida é:

$$E_C(U^0;X^0) = \min \{ \theta \mid \theta X^0 \in L(U^0)\} \qquad (4.1)$$

Essa medida projeta radialmente o vetor X^0 em $IsoqL(U^0)$, isto é, na fronteira da eficiência Debreu-Farrell da produção U^0. Como nenhuma redução equiproporcional adicional de todos os insumos é possível, então o plano de operação $[U^0;E_C(U^0;X^0).X^0]$ é empiricamente eficiente na produção U^0 segundo Debreu-Farrell. Por essa razão, essa medida é chamada medida Debreu-Farrell de eficiência no consumo.

De acordo com Kumbhakar e Lovell (2000), $E_C(U^0;X^0)$ satisfaz às seguintes propriedades: $E_C(U^0;X^0) \leq 1$; $E_C(U^0;X^0) = 1 \Leftrightarrow X \in \text{IsoqL}(U^0)$; $E_C(U^0;X^0)$ é não-crescente em X^0; $E_C(U^0;X^0)$ é invariante com relação às unidades de medida adotadas para U^0 e X^0; e, $E_C(U^0;X^0)$ é homogênea de grau –1 em X^0.

O plano $[U^0;X^0]$ é considerado Debreu-Farrell eficiente quando $E_C(U^0;X^0) = 1$ visto que qualquer contração do consumo X^0 inviabiliza a produção de U^0, enquanto que esse plano é ineficiente quando $E_C(U^0;X^0) < 1$, pois a produção U^0 pode ser gerada com $E_C(U^0;X^0).X^0$ que é menor que o consumo X^0. Essa medida é de fácil interpretação no meio gerencial pois $E_C(U^0;X^0)$ corresponde à máxima contração que se pode dar ao consumo X^0 sem inviabilizar a produção U^0. Todavia, essa medida não indica a eficiência segundo o conceito Pareto-Koopmans.

Por outro lado, $E_C(U^0;X^0)$ é um problema de otimização com função objetivo linear θX^0 definido em $L(U^0)$. Por conseguinte, há vários algoritmos computacionais de ampla difusão no meio empresarial para resolver (4.1), dependendo das características de $L(U^0)$. Em particular, quando $L(U^0)$ representa uma das tecnologias lineares por partes citadas no capítulo anterior, (4.1) pode ser resolvido empregando-se o Simplex.

De forma similar, a medida de eficiência técnica orientada para a produção E_P mede a expansão equiproporcional máxima que a produção U^0 pode ter com o mesmo consumo X^0. Assim sendo:

$$E_P(U^0;X^0) = \max\{\phi \mid \phi U^0 \in P(X^0)\} \tag{4.2}$$

Essa medida projeta radialmente o vetor U^0 na $\text{IsoqP}(X^0)$, isto é, na fronteira de eficiência Debreu-Farrell do consumo. Como nenhuma expansão equiproporcional adicional de todos os produtos é possível, então o plano de operação $[E_P(U^0;X^0).U^0;X^0]$ é empiricamente eficiente no consumo X^0 segundo Debreu-Farrell. Por essa razão, essa medida é chamada medida radial Debreu-Farrell de eficiência na produção.

A medida $E_P(U^0; X^0)$ satisfaz às seguintes propriedades: $E_P(U^0;X^0) \geq 1$; $E_P(U^0;X^0) = 1 \Leftrightarrow U^0 \in IsoqP(X^0)$; $E_P(U^0;X^0)$ é não-decrescente em U^0; $E_P(U^0;X^0)$ é invariante com relação às unidades de medida adotadas para U^0 e X^0; e, $E_P(U^0;X^0)$ é homogênea de grau +1 em U^0.

O plano $[U^0;X^0]$ é considerado eficiente quando $E_P(U^0;X^0) = 1$ tendo em vista não ser viável expandir a produção U^0 com o consumo X^0, e ineficiente quando $E_P(U^0;X^0) > 1$, pois o consumo X^0 permite que a produção $E_P(U^0;X^0).U^0$ seja gerada.

Apesar da medida Debreu-Farrell de eficiência na produção ser de fácil interpretação no meio gerencial, pois ela indica a máxima expansão que se pode dar à produção U^0 sem alterar o consumo X^0, ela não indica a eficiência segundo o conceito Pareto-Koopmans. Além disso, o algoritmo Simplex resolve o problema de otimização (4.2) quando P(X) representa uma das tecnologias lineares por partes descritas no capítulo três.

4.2 A Associação entre as Medidas Radiais de Eficiência Técnica e a Produtividade dos Planos de Operação Observados

Charnes, Cooper e Rhodes (1978) introduzem o termo Análise Envoltória de Dados (DEA) para denominar uma abordagem não-paramétrica de avaliação da eficiência técnica, baseada na idéia seminal de Farrell. Trata-se de uma abordagem de programação matemática para a construção de fronteiras de produção e de medidas de eficiência técnica relativa usadas na avaliação de planos de operação executados por unidades tomadoras de decisão (DMU)[13].

A medida CCR[14] Seminal foi desenvolvida com o objetivo de avaliar eficiência técnica de processos produtivos tecnologicamente semelhantes que transformam múltiplos insumos em múltiplos produtos, inclusive daqueles executados por organizações sem fins lucrativos, como são os programas públicos, para as quais os dados de preços de insumos e produtos não estão disponíveis ou não são

[13] Do inglês Decision Making Unit: forma mais abrangente empregada na literatura DEA de se referir a qualquer unidade produtiva ou organizacional

[14] Iniciais de Charnes, Cooper e Rhodes, os autores da publicação que introduziu a medida.

confiáveis[15]. Essa medida foi utilizada primeiramente na avaliação do programa educacional "Follow Thought", de apoio a crianças carentes, implantado em escolas públicas norte-americanas.

A importância da abordagem DEA para a pesquisa científica reflete-se no grande número de publicações registradas desde 1978. De acordo com Tavares (2002), já há mais de 3.000 trabalhos sobre DEA, considerados os livros, capítulos de livros, jornais, dissertações, conferências e artigos, publicados em mais de 40 países. Durante esse período, DEA foi aplicada na avaliação de diversos tipos de sistemas produtivos, tais como: escolas, bancos, hospitais, empresas de transporte urbano, restaurantes e prefeituras.

O pressuposto básico para a aplicação de DEA é a possibilidade de comparação entre organizações que fazem parte de um mesmo conjunto de referência[16]. Nesse sentido, assume-se que elas alocam os mesmos tipos de insumos para gerar os mesmos tipos de produtos.

A eficiência técnica de uma DMU^0 é calculada pela comparação da produtividade do seu plano de operação observado [$U^0;X^0$] com a produtividade dos demais planos de operação [$U^j;X^j$] executados pelas demais DMU do conjunto de referência. De acordo com Knight, a produtividade do plano de operação [$U^0;X^0$] pode ser medida por:

$$PR^0 = \frac{\sum \mu_m^0 u_{0m}}{\sum v_n^0 x_{0n}}, \quad \text{ou seja} \quad PR^0 = \frac{\mu^0 U^0}{v^0 X^0} \qquad (4.3)$$

onde μ^0 e v^0 são os vetores que representam, respectivamente, os preços virtuais atribuídos aos produtos de U^0 e aos insumos de X^0 pelos gestores da DMU^0[17].

Dados os valores de μ^0 e v^0, as produtividades das demais DMU pertencentes ao conjunto de referência são:

[15] Essa medida resolve o problema da indisponibilidade dos preços na medida de produtividade proposta por Knight.
[16] O conjunto de referência é formado por organizações que produzem sob uma mesma tecnologia e que, por esse motivo, podem ter suas produtividades comparadas.
[17] Os preços virtuais μ e v poderiam ser definidos *a priori*; no entanto, tal definição geralmente provoca erro na avaliação da eficiência de [$U^0;X^0$]; DEA evita esses erros pois deriva tais preços a partir dos dados observados.

$$PR = \frac{\sum \mu_m^0 u_m}{\sum v_n^0 x_n}, \quad \text{ou seja} \quad PR = \frac{\mu^0 U}{v^0 X} \tag{4.4}$$

O plano de operação [U^0;X^0][18] será considerado eficiente tecnicamente se nenhum outro plano de operação viável [U; X] obtiver produtividade maior que PR^0. A hipótese do comportamento otimizador do gestor da DMU^0 permite assumir que μ^0 e v^0 deveriam maximizar PR^0. Os preços virtuais relativos μ^0 e v^0 podem ser calculados resolvendo o seguinte problema de maximização:

$$\begin{array}{lll}
\max & PR^0 = & \dfrac{\sum \mu_m u_{0m}}{\sum v_n x_{0n}} \\
\text{sujeito a:} & PR^j & \dfrac{\sum \mu_m u_{jm}}{\sum v_n x_{jn}} \leq 1 \ \forall\, j \\
 & & \mu_m \geq 0 \qquad \forall\, m \\
 & & v_n \geq 0 \qquad \forall\, n
\end{array} \tag{4.5}$$

Como $PR^j \leq 1$ para todo [U^j;X^j] observado, então o valor ótimo de PR^0 também não excederá a unidade.

O procedimento de Charnes e Cooper (1962) permite transformar (4.5) no seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{lll}
\max & \overline{PR^0} = \sum \mu_m u_{0m} & \\
\text{sujeito a:} & \sum v_n x_{0n} = 1 & \\
 & -\sum v_n x_{jn} + \sum \mu_m u_{jm} \leq 0 & \forall\, j \\
 & \mu_m \geq 0 & \forall\, m \\
 & v_n \geq 0 & \forall\, n
\end{array} \tag{4.6}$$

cuja notação matricial é:

[18] E por conseqüência a DMU^0

$$
\begin{aligned}
&\max && \mu U^0 \\
&\text{sujeito a}: \overline{PR^0} && \nu X^0 = 1 \\
& && -\nu \mathbf{X} + \mu \mathbf{U} \leqq \vec{0} \\
& && \mu \geqq \vec{0} \\
& && \nu \geqq \vec{0}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

na qual $\mathbf{X} = \{X^j\}$ e $\mathbf{U} = \{U^j\}$.

A medida (4.7), conhecida como medida CCR Seminal orientada para o consumo, é o dual do seguinte problema de programação linear:

$$
\begin{aligned}
\theta^* = \min \quad & \theta \\
\text{sujeito a}: \ & \theta X^0 - Z\mathbf{X} \geqq \vec{0} \\
& Z\mathbf{U} \geqq U^0 \\
& Z \geqq \vec{0}
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

que é equivalente a calcular $\theta^* = \min \{\, \theta \mid \theta X^0 - Z\mathbf{X} \geqq \vec{0};\ Z\mathbf{U} \geqq U^0;\ Z \geqq \vec{0} \}$. Ou seja, $\theta^* = \min \{\, \theta \mid \theta X^0 \in L(U^0) \}$ quando $L(U^0)$ representa uma tecnologia linear por partes construída com os planos de operação observados descritos por **U** e **X** e com as hipóteses de retorno constante de escala e de descarte forte de insumos e produtos. Por conseguinte, θ^* corresponde à medida Debreu-Farrell de eficiência no consumo em tecnologia produtiva de retorno constante de escala e descarte forte de insumos e produtos.

Na literatura DEA, (4.8) é chamada forma do envelopamento da medida CCR Seminal orientada para o consumo, enquanto (4.7) é conhecida como a forma dos multiplicadores[19]. Normalmente, resolve-se a forma do envelopamento devido à redução no esforço necessário ao cálculo relacionado ao menor número de restrições desse problema, pois em geral, o número de J planos de operação observados $[U^j;X^j]$ é maior que o número de insumos e produtos (N+M).

[19] O problema (4.5) é facilmente convertido para uma orientação na produção.

A abordagem DEA calcula a produtividade PR^j de cada plano de operação observado, aplicando (4.7) ou (4.8) a todos os panos de operação observados. Essa abordagem identifica os planos de operação eficientes, que formam a fronteira de eficiência empírica, e os planos ineficientes que estão localizados no interior da tecnologia produtiva. Além disso, fornece ao gestor da DMU^0 informações relevantes que dão suporte às suas decisões futuras, tais como: o estabelecimento de uma medida clara de ineficiência relativa de cada plano de operação observado[20], inclusive do plano $[U^0;X^0]$ por ele executado; a identificação dos planos observados eficientes que podem ser tomados como referência na alocação de recursos da DMU^0; a determinação de possíveis causas de ineficiência técnica de $[U^0;X^0]$; e a proposição de ações corretivas que eliminem as ineficiências detectadas nesse plano. Em conseqüência, essas informações fazem da abordagem DEA uma poderosa ferramenta gerencial, possibilitando ao decisor elaborar ou modificar seus planos de ações com o objetivo de melhorar a produtividade de seus processos produtivos e tornar sua organização mais competitiva dentro da sua área de atuação.

4.3 Aperfeiçoamento das Medidas Radiais

O primeiro ajuste feito à medida CCR Seminal está relacionado à excessiva flexibilidade das restrições impostas aos preços virtuais μ e ν, que permite a eles assumirem valor igual a zero. Essa condição é incompatível com o conceito de produtividade de Knight, pois os vetores μ e ν representam a valoração ou utilidade dos produtos e insumos envolvidos no processo produtivo: não é coerente, do ponto de vista econômico, que o gestor da DMU^0 assuma utilidade zero para algum insumo ou produto relevante para essa organização.

Nessa direção, Charnes Cooper e Rhodes (1979) apresentam a medida CCR Básica que, ao substituir, em (4.7) as restrições $\mu \geqq \vec{0}, \nu \geqq \vec{0}$, por $\mu \geq \varepsilon.\vec{1},\ \nu \geq \varepsilon.\vec{1},\ \varepsilon > 0$, sendo ε um número não-arquimediano, infinitamente

[20] Uma vez que a análise de eficiência de uma DMU^0 é feita comparativamente às demais DMU^j.

pequeno e positivo, assegura que todos os preços virtuais estimados sejam positivos. A medida CCR Básica orientada para o consumo é definida pelo seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mu U^0 \\ \text{sujeito a:} \quad & \nu X^0 = 1 \\ & -\nu \mathbf{X} + \mu \mathbf{U} \leqq \vec{0} \\ & \mu \geqq \varepsilon.\vec{1} \\ & \nu \geqq \varepsilon.\vec{1} \end{aligned} \tag{4.9}$$

cuja forma do envelopamento é:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta - \varepsilon\,(\vec{1}.S + \vec{1}.T) \\ \text{sujeito a:} \quad & Z\mathbf{U} - T = U^0 \\ & \theta X^0 - Z\mathbf{X} - S = \vec{0} \\ & Z \geqq \vec{0} \quad S \geqq \vec{0} \quad T \geqq \vec{0} \end{aligned} \tag{4.10}$$

O resultado da inclusão das restrições $\mu \geq \varepsilon.\vec{1}$, $\nu \geq \varepsilon.\vec{1}$ é o surgimento em (4.10) dos vetores $S = [\, s_n \,] \in \Re_+^N$ e $T = [\, t_m \,] \in \Re_+^M$, que representam, respectivamente, eventuais excessos das quantidades disponíveis de insumos e de folgas nas quantidades geráveis de produtos. Essas variáveis indicam quantidades de insumos não consumidos e produtos que podiam ser gerados depois de atingida a eficiência radial.

O fato de ε ser um número não-arquimediano exige que a forma do envelopamento seja empregada para calcular a medida CCR Básica orientada para o consumo, uma vez que essa forma pode ser resolvida em duas fases. Na primeira, obtém-se a medida radial θ^*, calculada por (4.8), que é empregada, na segunda fase, para construir o seguinte problema de programação linear:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & (\vec{1}.S + \vec{1}.T) \\
\text{sujeito a:} \quad & Z\mathbf{U} - T = U^0 \\
& Z\mathbf{X} + S = \theta^* X^0 \\
& Z \geqq \vec{0} \quad S \geqq \vec{0} \quad T \geqq \vec{0}
\end{aligned}
\qquad (4.11)
$$

O objetivo da segunda fase é verificar a existência de eventuais excessos de insumos S após o consumo ter sido contraído ao mínimo possível $(\theta^* X^0)$ para gerar U^0, e de eventuais folgas T na produção, haja vista que com $(\theta^* X^0)$ é possível gerar nó mínimo U^0.

Dessa forma, enquanto a primeira fase fornece uma medida radial de eficiência técnica, a segunda fase fornece uma medida não-radial de eficiência após a contração máxima de o consumo ter sido realizada.

De acordo com a medida CCR Básica orientada para o consumo, o plano de operação observado $[U^0;X^0]$ é considerado eficiente somente se não for possível contrair o consumo $(\theta^* = 1)$ e não existir excesso de insumos e folgas de produtos $(\vec{1}.S + \vec{1}.T = 0)$.

Embora o procedimento de duas fases possibilite à medida CCR Básica avaliar eficiência técnica de acordo com o conceito de eficiência Pareto-Koopmans, essa medida não é completa, posto que ela não fornece uma interpretação gerencial direta. Em primeiro lugar, a solução ótima $(\vec{1}.S^* + \vec{1}.T^*)$ do problema (4.11) corresponde à soma de excessos de insumos e folgas de produtos, sendo portanto dependente das unidades empregadas para medir as quantidades dos insumos consumidos e dos produtos gerados. Em segundo lugar, a soma numérica dessa solução ótima com a medida radial θ^*, calculada por (4.8) e que é adimensional, com vistas a gerar o valor da medida CCR de (4.10), não permite qualquer interpretação econômica do número obtido.

Uma das mais representativas extensões à medida CCR Básica foi proposta por **B**anker, **C**harnes e **C**ooper (1984) com a apresentação da medida BCC Básica, que é adequada para medir eficiência técnica em tecnologias que exibem retornos variáveis de escala e descarte forte de insumos e produtos. Na sua versão orientada para o consumo, essa tecnologia empírica é definida por:

$$LE(U) = \{X \mid Z\mathbf{U} \geqq U;\ X \geqq Z\mathbf{X};\ Z.\vec{1} = 1,\ Z \in \Re_+^J\} \qquad \forall\ U \in \Re_+^M$$

A medida BCC difere da CCR pela condição adicional $Z.\vec{1} = 1$, na forma do envelopamento (4.10), gerando, na forma dos multiplicadores (4.9), uma variável irrestrita adicional w, que caracteriza a propriedade da fronteira de eficiência ser localmente crescente (w*>0), constante (w*=0), ou decrescente (w*<0) na vizinhança da solução eficiente [U*;X*] = [Z*$\mathbf{U}$; Z*$\mathbf{X}$]. A medida BCC Básica orientada para o consumo é definida pelo seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \max & \mu U^0 + w \\ \text{sujeito a:} & \nu X^0 = 1 \\ & -\nu\mathbf{X} + \mu\mathbf{U} + \vec{1}.w \leqq \vec{0} \\ & \mu \geqq \varepsilon.\vec{1} \\ & \nu \geqq \varepsilon.\vec{1} \\ & w \text{ irrestrito} \end{array} \tag{4.12}$$

cuja forma do envelopamento é:

$$\begin{array}{ll} \min & \theta - \varepsilon(\vec{1}.S + \vec{1}.T) \\ \text{sujeito a:} & Z\mathbf{U} - T = U^0 \\ & \theta X^0 - Z\mathbf{X} - S = \vec{0} \\ & Z.\vec{1} = 1 \\ & Z \geqq \vec{0}\ \ S \geqq \vec{0}\ \ T \geqq \vec{0} \end{array} \tag{4.13}$$

Com a medida BCC é possível decompor a ineficiência técnica avaliada com a medida CCR Básica em dois componentes: a ineficiência de escala, associada a variações da produtividade decorrentes de mudanças na escala de produção, e a ineficiência de gestão, associada à habilidade gerencial da organização (BANKER, CHARNES e COOPER, 1984). A medida BCC Básica indica a ineficiência de gestão.

A ineficiência de escala é a diferença entre o valor da medida BCC e o da medida CCR.

As medidas radiais apresentadas nesta seção não são medidas completas de eficiência técnica. Aquelas estritamente radiais são de fácil interpretação no meio gerencial, mas não identificam a eficiência Pareto-Koopmans; aquelas que identificam a eficiência Pareto-Koopmans, são de difícil interpretação no meio gerencial. Todavia, elas são muito usadas, na prática, pela facilidade operacional, e estudadas na academia, por serem seminais para o desenvolvimento das medidas não-radiais. Duas das medidas não-radiais mais tradicionais são tratadas a seguir.

4.4 Medidas Não-Radiais de Eficiência Técnica

Desde a formulação do conceito de eficiência por Koopmans (1951), os desenvolvimentos teóricos em torno de uma medida de eficiência que atenda plenamente a esse conceito têm apontado o quanto as medidas radiais são inadequadas e têm estimulado o desenvolvimento de medidas não-radiais. Esta seção descreve as medidas não-radiais Aditiva e Russell, que atendem ao conceito de eficiência Pareto-Koopmans.

4.2.1 Medida Aditiva

Apresentada por Charnes *et al* (1985), essa medida avalia a eficiência técnica do plano de operação observado $[U^0;X^0]$ somando os excessos de insumos consumidos e as folgas de produtos existentes. Essa medida é definida pelo seguinte problema de programação linear:

$$
\begin{array}{ll}
\max & (\vec{1}.S + \vec{1}.T) \\
\text{sujeito a}: & Z\mathbf{X} + S = X^0 \\
& -Z\mathbf{U} + T = -U^0 \\
& Z.\vec{1} = 1 \\
& Z \geqq \vec{0} \;\; S \geqq \vec{0} \;\; T \geqq \vec{0}
\end{array}
\tag{4.14}
$$

De acordo com (4.14), um plano de operação é considerado eficiente quando $S = \vec{0}$ e $T = \vec{0}$, ou seja, quando não existe qualquer folga de produto ou excesso de insumo para esse plano.

Essa medida avalia ineficiência técnica de acordo com o conceito Pareto-Koopmans. Quando o seu escore de ineficiência é igual a zero, o plano de operação $[U^0;X^0]$ é eficiente, pois não há folga de produto ou excesso de insumo. Quando é maior que zero, esse plano é ineficiente, pois é possível reduzir o consumo ou aumentar a produção.

O dual de (4.14) tem a seguinte formulação:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \nu X^0 - \mu U^0 + w \\
\text{sujeito a}: & \nu\mathbf{X} - \mu\mathbf{U} + \vec{1}.w \geqq \vec{0} \\
& \nu \geqq \vec{0} \\
& \mu \geqq \vec{0} \\
& w \;\; \text{irrestrito}
\end{array}
\tag{4.15}
$$

A medida Aditiva não pode ser considerada uma medida completa porque o escore de ineficiência calculado $(\vec{1}.S^* + \vec{1}.T^*)$ não tem imediata interpretação no meio gerencial. Além disso, essa medida não é invariante à mudança das unidades de medida dos insumos e dos produtos.

A Medida de Proporções de Ineficiência (MIP), apresentada por Cooper, Park e Pastor (1999) e a seguir formulada, merece destaque especial nesta dissertação haja vista ela ser um aperfeiçoamento da medida Aditiva e básica na formulação das medidas completas de eficiência técnica.

$$
\begin{aligned}
MIP(U^0;X^0) = \max \quad & \sum \frac{s_n}{x_{0n}} + \sum \frac{t_m}{u_{0m}} & & \\
\text{sujeito a: } & \sum z_j x_{jn} + s_n = x_{0n} & \forall\, n & \\
& \sum z_j u_{jm} - t_m = u_{0m} & \forall\, m & \\
& \sum z_j = 1 & \forall\, j & \\
& s_n \geq 0 & \forall\, n & \\
& t_m \geq 0 & \forall\, m &
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

cuja forma do envelopamento é:

$$
\begin{aligned}
MIP(U^0;X^0) = \min \quad & \sum v_n x_{0n} - \sum \mu_m u_{0m} + w & \\
\text{sujeito a: } & \sum v_n x_{jn} - \sum \mu_m u_{jm} + w \geq 0 \quad \forall\, j & \\
& v_n \geq 1/x_{0n} \qquad \forall\, n & \\
& \mu_m \geq 1/u_{0m} \qquad \forall\, m & \\
& w \text{ irrestrito} &
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

Destaque-se que a medida MIP avalia eficiência técnica de acordo com o conceito Pareto-Koopmans. De fácil operacionalização computacional, essa medida associa-se a uma interpretação razoavelmente boa no meio gerencial, pois ela reflete a "média" de ineficiência técnica do plano $[U^0;X^0]$, estimada pela soma das proporções de insumos que podem ser economizados e das proporções de produtos que podem ser gerados adicionalmente. Todavia, ela apresenta o inconveniente de ser aplicada somente a tecnologias que exibem retorno de escala variável e dos preços virtuais dependerem das quantidades de insumos consumidas x_{0n} e dos produtos gerados u_{0m}, portanto função das ineficiências do plano $[U^0;X^0]$ que está sendo avaliado.

4.2.2 Medida Russell

A versão original dessa medida, descrita por Färe e Lovell (1978), orienta-se para a redução do consumo e aplica-se somente a tecnologias que geram um único produto. Em linhas gerais, a medida Russell verifica se as quantidades de todos os insumos consumidos podem ser reduzidas sem prejudicar a produção. Quando nenhum insumo pode ter sua quantidade diminuída, então o plano de operação observado é eficiente; caso contrário, isto é, quando a quantidade de pelo menos um insumo pode ser reduzida, (mantendo inalteradas as quantidades dos demais insumos), então o plano de operação observado é ineficiente. Como essa medida somente se aplica a tecnologias que geram um único produto, ela avalia eficiência técnica de acordo com o conceito Pareto-Koopmans.

A expressão matemática da medida Russell original corresponde ao seguinte problema de otimização:

$$R_C[u_0;X^0] = \min \left\{ \theta = \frac{1}{N}\sum \theta_n \mid [\theta_n . x_{0n}] \in L(u_0),\ \theta_n \geqq 0 \right\} \tag{4.18}$$

É óbvia a adequação dessa versão original da medida Russell para aplicação em tecnologias que consomem um único insumo. Nesse caso,

$$R_C[U^0;x_0] = \max \left\{ \phi = \frac{1}{M}\sum \phi_m \mid [\phi_m . u_{0m}] \in P(x_0),\ \phi_m \geqq 0 \right\} \tag{4.19}$$

O grande inconveniente da versão original da medida Russell é ela não ser aplicada a operações produtivas que empregam múltiplos insumos para gerar múltiplos produtos. Färe Grosskopf e Lovell (1985) apresentam a medida Russell Grafo que elimina esse inconveniente. Essa medida tem a seguinte representação matemática:

$$\begin{aligned}
R_G(U^0;X^0) = \quad & \min & & \frac{1}{M+N}\left(\sum \theta_n + \sum 1/\phi_m\right) & & \\
& \text{sujeito a:} & & \sum z_j x_{jn} \le \theta_n x_{0n} & & \forall\ n \\
& & & \sum z_j u_{jm} \ge \phi_m u_{0m} & & \forall\ m \\
& & & \sum z_j \ge 0 & & \forall\ j \\
& & & \phi_m \ge 1 & & \forall\ m \\
& & & 0 \le \theta_n \le 1 & & \forall\ n
\end{aligned} \tag{4.20}$$

A medida Russell Grafo avalia eficiência técnica segundo Pareto-Koopmans. Porém, não é uma medida completa, pois, além de não ser de fácil interpretação no meio gerencial, ela é de difícil computação dadas as características não-lineares da função objetivo.

Tanassoulis e Dyson (1992), Ruggiero e Bretschneider (1998), e Ruggiero (2000) apresentam trabalhos que buscam aperfeiçoar a medida Russell Grafo. Todavia, nenhuma das medidas por eles proposta é completa.

As medidas completas de eficiência técnica que têm surgido na literatura buscam resolver os inconvenientes da medida Russell Grafo, da medida Aditiva e da MIP. O problema da não-linearidade da medida Russell Grafo é atacado por Pastor, Ruiz e Sirvent (1999), com sua Medida Russell Grafo Melhorada, e por Tone (2001), com sua Medida Baseada em Folgas (SBM), que é um aperfeiçoamento da Medida Russell Grafo Melhorada. Os problemas dos preços virtuais da MIP e da invariância na unidade da medida Aditiva são solucionados por Cooper, Park e Pastor (1999) com sua Medida Ajustada por Amplitude (RAM). As medidas completas SBM e RAM são seminais na evolução da classe de medidas completas e, por isso, foram selecionadas para serem tratadas detalhadamente nesta dissertação.

5 MEDIDAS COMPLETAS DE EFICIÊNCIA TÉCNICA

Este capítulo descreve as medidas de eficiência técnica SBM e RAM, suas formulações matemáticas e seus processos computacionais, sob o foco de mostrar que elas atendem às duas propriedades e aos dois critérios exigidos de uma medida completa. As propriedades são:

- apresentar um resultado escalar e compatível com os resultados das demais medidas existentes, de modo a ser consistente com os estudos sobre medidas de eficiência produtiva desenvolvidos anteriormente;
- ser abrangente de modo a atender ao conceito de eficiência Pareto-Koopmans;

Os critérios são:

- requerer formulações e cálculos matemáticos simples, podendo ser calculada com algoritmos e métodos computacionais já disponíveis; e,
- permitir fácil interpretação no meio gerencial, não tendo sua aplicação restrita a contextos e ambientes específicos.

5.1 Medida Baseada em Folgas (SBM)

Proposta por Tone (2001), essa medida é um aperfeiçoamento da medida Russell Grafo. As diferenças fundamentais entre elas são: a medida SBM pode ser interpretada facilmente como o produto das (in)eficiências do consumo e da produção; pode ser calculada pelo algoritmo Simplex; e fornece interpretação econômica dos multiplicadores obtido pelo cálculo do seu problema dual. A medida SBM é baseada nos excessos de consumo e nas folgas na produção relativamente às quantidades observadas. Para todo plano de operação observado $[U^0; X^0]$, tal medida é:

$$\tau^*[U^0;X^0] = \min \tau = \frac{1 - \dfrac{\sum s_n / x_{0n}}{N}}{1 + \dfrac{\sum t_m / u_{0m}}{M}}$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a: } & \sum z_j x_{jn} + s_n = x_{0n} && \forall\, n \\ & \sum z_j u_{jm} - t_m = u_{0m} && \forall\, m \\ & z_j \geq 0\ \forall\, j;\ s_n \geq 0\ \forall\, n;\ t_m \geq 0\ \forall\, m. \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Do ponto de vista teórico, essa medida requer **X** > 0 e **U** > 0. Porém, do ponto de vista prático, essa limitação é contornada com os seguintes artifícios computacionais:

- $\forall\, n$, com $x_{0n} = 0$

i) exclua a observação associada na somatória $\sum s_n / x_{0n}$ e adeque o parâmetro N da média $\sum (s_n / x_{0n}) / N$ de modo que ele corresponda ao número de parcelas válidas na somatória.

ii) reescreva a restrição $\sum z_j x_{jn} + s_n = x_{0n}$ retirando o termo s_n .

- $\forall\, m$, com $u_{0m} = 0$

i) quando limitações fora do controle do produtor impedirem a geração desse produto, procede-se de maneira semelhante a acima descrita para $x_{0n} = 0$.

ii) quando $u_{0m} = 0$ decorre exclusivamente da opção do produtor, deve-se manter a parcela relativa a t_m na somatória $\sum t_m / u_{0m}$, e, adicionalmente substituir a restrição $\sum z_j u_{jm} - t_m = u_{0m} = 0$ pela restrição $\sum z_j u_{jm} - t_m = \underline{u}_{0m}$, onde $\underline{u}_{0m} = \min \{ u_{jm} > 0 \}$, de modo a assegurar a possibilidade do produtor gerar esse produto, se assim quiser.

Pode ser observado que τ^* atende às duas propriedades exigidas a uma medida completa. Em primeiro lugar, trata-se de uma função escalar monotonicamente decrescente, tanto para os excessos do consumo quanto para as folgas da produção e; em segundo lugar, $\tau^*(U^0; X^0) = 1$, somente quando $s_n = 0 \; \forall \, n$ e $t_n = 0 \; \forall \, m$, isto é, somente quando $[U^0; X^0]$ for um plano de operação eficiente Pareto-Koopmans. Ademais, $\tau^* < 1$ ocorre somente quando existir pelo menos um $s_n \neq 0$ ou um $t_m \neq 0$, isto é, quando $[U^0; X^0]$ não for um plano de operação eficiente Pareto-Koopmans.

Por conseguinte, para τ^* ser uma medida completa de eficiência técnica é necessário que ela atenda aos dois critérios definidos na introdução deste capítulo, ou seja, que o valor $\tau^*[U^0; X^0]$ possa ser calculado através de algoritmos computacionais de uso generalizado e ela seja de fácil interpretação no meio gerencial. Quanto a esse último aspecto, observe-se que $\tau = \rho_C / \rho_P$ quando $\rho_C = 1 - \frac{1}{N}\left(\sum s_n / x_{0n}\right)$ e $\rho_P = 1 + \frac{1}{M}\left(\sum t_m / u_{0m}\right)$. Assim sendo, pode-se interpretar:

ρ_C como um escore de eficiência de $[U^0; X^0]$ no consumo, uma vez que $0 \leq \rho_C \leq 1$ e que $\rho_C^* = 1$ se e somente se $s_n = 0 \; \forall n$, isto é, somente quando $[U^0; X^0]$ é um plano de operação eficiente no consumo. Assim, $(1 - \rho_C^*)$ reflete a maior redução "média" que o consumo pode ter.

ρ_P como um escore de eficiência de $[U^0; X^0]$ na produção, uma vez que $\rho_P \geq 1$ e que $\rho_P^* = 1$ se e somente se $t_m = 0 \;\; \forall m$, isto é, somente quando $[U^0; X^0]$ é um plano de operação eficiente na produção. Assim, $\rho_P^* - 1$ reflete o maior aumento "médio" que a produção pode ter.

$\tau^* = \rho_C^* / \rho_P^*$ é um indicador de eficiência global do plano de operação $[U^0; X^0]$, pois reflete a ineficiência total desse plano como a razão da ineficiência de $[U^0; X^0]$ no consumo, expresso por ρ_C^*, e a ineficiência desse plano na produção, expresso por ρ_P^*.

Além de identificar as organizações eficientes e ineficientes, a medida SBM fornece às organizações ineficientes orientação para identificar planos de operação eficientes $[U^{0*};X^{0*}]$ com a eliminação dos excessos e folgas existentes, isto é, empregando-se $x_{0n}^* = x_{0n} - s_n^* \ \forall n$ para gerar $u_{0m}^* = u_{0m} + t_m^* \ \forall n$. Caso as reduções no consumo s_n^* e expansões na produção t_m^* não sejam possíveis em uma dada situação, podem ser impostos a eles limites como $s_n \leq s_n^L$, para alguns n, e $t_m \leq t_m^L$, para alguns m,. Em conseqüência, a nova medida de eficiência fornecerá um escore igual ou maior que τ^* calculado com (5.1)

Tone (2001) mostra que (5.1) pode ser calculada resolvendo o seguinte problema de programação linear:

$$
\begin{array}{llll}
\hat{\tau}^*[U^0;X^0] = & \min \hat{\tau} = & f - \sum \hat{s}_n / (N.x_{0n}) & \\
 & \text{sujeito a:} & f + \sum \hat{t}_m / (M.u_{0m}) & = 1 \\
 & & f.x_{0n} - \sum \hat{z}_j .x_{jn} - \hat{s}_n & = 0 \ \forall \ n \qquad (5.2) \\
 & & - f.u_{0m} + \sum \hat{z}_j .u_{jm} - \hat{t}_m & = 0 \ \forall \ m \\
 & & f \geq 0; \ \hat{z}_j \geq 0 \ \forall \ j; \ \hat{t}_m \geq 0 \ \forall \ m; \ \hat{s}_n \geq 0 \ \forall \ n &
\end{array}
$$

O Apêndice detalha as transformações que levam (5.1) a (5.2), bem como aquelas que calculam a solução ótima τ^*, s_n^*, t_m^*, z_j^* de (5.1) a partir da solução ótima $f^*, \hat{\tau}^*$, $\hat{s}_n^*$ e $\hat{t}_m^*$ de (5.2). Note-se que a solução ótima $f^*, \hat{\tau}^*$, $\hat{s}_n^*$ e $\hat{t}_m^*$ pode ser calculada empregando qualquer pacote computacional que resolva problemas de programação linear, a exemplo do LINDO, disponível no *site* www.lindo.com, e até mesmo do EXCEL, da Microsoft. Portanto, a medida SBM é completa pois ela também atende aos dois critérios exigidos.

Saliente-se que a medida SBM mantém a característica da Análise Envoltória de Dados relativamente às variáveis $\nu \in \Re_+^N$ e $\mu \in \Re_+^M$, da forma dos multiplicadores de (5.2), que podem ser interpretadas, para os planos de operação observados, como preços virtuais dos insumos e dos produtos, respectivamente.

5.2 Medida Ajustada por Amplitude (RAM)

Proposta por Cooper, Park e Pastor (1999), essa medida é baseada nos excesso no consumo e folgas na produção e foi construída a partir da medida DEA Aditiva. A principal diferença entre essas duas é que a RAM é calculada com base na amplitude das quantidades de insumos e produtos, o que torna essa medida adimensional. Em conseqüência, a medida é invariante a mudanças nas unidades de insumos e produtos, o que permite uma interpretação gerencial adequada da somatória das folgas de produtos e excessos de insumos.

Para todo plano de operação observado $[U^0; X^0]$, tal medida é:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^*[U^0;X^0] = \min\ \Gamma = \ & 1 - \frac{1}{N+M}\left(\sum \frac{s_n}{R_n^-} + \sum \frac{t_m}{R_m^+}\right) \\
\text{sujeito a: } & \sum z_j x_{jn} + s_n = x_{0n} && \forall\ n \\
& -\sum z_j u_{jm} + t_m = -u_{0m} && \forall\ m \qquad (5.3) \\
& \sum z_j = 1 \\
& z_j \geq 0\ \forall\ j;\ s_n \geq 0\ \ \forall\ n;\ t_m \geq 0\ \forall\ m
\end{aligned}
$$

onde $R_n^- = \overline{x}_n - \underline{x}_n$, $R_m^+ = \overline{u}_m - \underline{u}_m$

$$
\begin{aligned}
\text{com } \ \overline{x}_n &= \max_j \{x_{jn}\} & \underline{x}_n &= \min_j \{x_{jn}\} \text{ e} \\
\overline{u}_m &= \max_j \{u_{jm}\} & \underline{u}_m &= \min_j \{u_{jm}\}
\end{aligned}
$$

Cooper, Park e Pastor (2001) mostram que o fato da medida RAM, definida em (5.3), aplicar-se somente a tecnologias que exibem retorno de escala variável assegura que as amplitudes R_n^- e R_m^+ representam o valor máximo possível de excessos de insumos e folgas de produtos, propriedade que garante $0 \leq \Gamma^*[U^0;X^0] \leq 1$.

Observe, por outro lado, que o valor $\left(\sum s_n/R_n^- + \sum t_m/R_m^+\right)/(N+M)$, que avalia a ineficiência total do plano de operação $[U^0;X^0]$, pode ser interpretado como a ineficiência média desse plano, considerando a soma de dois componentes, a saber:

- $0 \leq \frac{\sum s_n/R_n^-}{N} \leq 1$, que pode ser interpretado como a ineficiência "média" no consumo; e
- $0 \leq \frac{\sum t_m/R_m^+}{M} \leq 1$, que pode ser interpretado como a ineficiência "média" na produção.

O dual de (5.3)[21], que corresponde à forma dos multiplicadores da medida RAM, tem a seguinte formulação matemática:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum v x_{0n} - \sum \mu u_{0m} + w^0 & \\
\text{sujeito a:} & \sum v x_{jn} - \sum \mu u_{jm} + w^0 & \forall\, j \\
 & v_n \geq 1/[R_n^-.(N+M)] & \forall\, n \\
 & \mu_m \geq 1/[R_m^+.(N+M)] & \forall\, m \\
 & w^0 \text{ irrestrito} &
\end{array}
\qquad (5.4)
$$

Por conseguinte, a medida RAM satisfaz às duas propriedades e aos dois critérios exigidos de uma medida completa de eficiência técnica.

Cooper, Park e Pastor (1999) mostram, adicionalmente, que essa medida satisfaz às seguintes propriedades:

- Os escores de eficiência calculados por (5.3) definem um *ranking* válido de desempenho, uma vez que as ineficiências são medidas em relação às amplitudes das quantidades observadas de cada insumo e de cada produto.
- É possível identificar os planos de operação observados completamente ineficientes, isto é, para os quais $\Gamma^* = 0$.

[21] Após (5.3) ter sido transformado em um problema de maximização.

Com essas últimas observações, completa-se a verificação da medida RAM atender às duas propriedades e aos dois critérios exigidos a uma medida completa de eficiência técnica, pois ela é uma medida escalar, baseada nos excessos de insumos e folgas de produto, que considera eficiente apenas planos de operação observados que não apresentam excessos de insumos ($s_n = 0 \; \forall \; n$) e folgas de produtos ($t_n = 0 \; \forall \; m$), isto é, somente quando $[U^0; X^0]$ for um plano de operação eficiente Pareto-Koopmans. Além disso, por se tratar de um problema comum de programação linear, Γ^*, S^* e T^* podem ser facilmente calculados empregando qualquer pacote computacional que resolva esse tipo de problema, como os já citados LINDO, e EXCEL, Ademais, os resultados obtidos podem ser diretamente interpretados no meio gerencial, pois fornecem um escore de eficiência "média" global do plano de operação avaliado, calculado pela soma das (in)eficiências médias observadas na produção e no consumo.

Como a medida SBM, a medida RAM também mantém a característica da Análise Envoltória de Dados relativamente às variáveis $\nu \in \Re_+^N$ e $\mu \in \Re_+^M$, da forma dos multiplicadores de (5.4), que podem ser interpretadas, para os planos de operação observados, como preços virtuais dos insumos e dos produtos, respectivamente.

A medida RAM definida pelo problema de programação linear (5.3) necessita ser adequado para ser uma medida aplicada a tecnologias com retornos constantes de escala, uma vez que ela é definida para tecnologias com retornos de escala variáveis. Para tal, a restrição $Z.\vec{1}=1$ deve ser retirada de (5.3) enquanto que as restrições $s_n \leq R_n^- \; \forall \; n$ e $t_m \leq R_m^+ \; \forall \; m$ devem ser incluídas.

6 ILUSTRAÇÃO DAS MEDIDAS SBM E RAM

Neste capítulo, as duas medidas completas SBM e RAM são ilustradas com uma aplicação a um banco de dados de universidades federais brasileiras.

Emprega-se o banco de dados de Belloni (2000) nessa ilustração. As principais fontes de dados usadas por esse pesquisador são a edição de 1994 do Boletim de Dados Físicos e Orçamentários das Instituições de Ensino Superior Supervisionadas pelo MEC, publicado pela Secretaria de Ensino Superior (SESU), e os resultados dos Exames Nacionais de Cursos de Graduação de 1998, disponibilizados pelo Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais (INEP).

Em sua pesquisa, Belloni realizou análise estatística exploratória multivariada para identificar os fatores educacionais presentes nos dados disponíveis, suas inter-relações e variáveis descritoras. A medida BCC Básica orientada para a produção foi empregada para analisar a eficiência técnica de 33 universidades federais brasileiras (UFB). O procedimento interativo de Norman e Stokes (1991) foi adotado para construir uma fronteira de eficiência na produção.

O banco de dados empregado está transcrito na tabela 6.1[22], na qual a variável

PROF	corresponde ao número total de professores;
FORM	ao número total de alunos formados;
ART	ao número total de artigos publicados; e,
IQG	é um indicador de qualidade da graduação, construído por Belloni (2000).

O processo de tratamento dos dados descrito acima levou esse pesquisador a escolher a função produtividade definida em (6.1), que também é usada nesta dissertação, de modo a melhor ilustrar a aplicação das medidas SBM e RAM.

$$PR = \frac{\mu_F . FORM + \mu_A . ART + \mu_I . IQG}{\nu_P . PROF} \qquad (6.1)$$

onde μ_F, μ_A, μ_I e ν_P são preços virtuais da UFB analisada.

[22] Dado o elevado número de tabelas deste capítulo, todas elas estão transcritas no final deste capítulo.

As tabelas 6.2 e 6.3 apresentam os resultados obtidos por Belloni (2000) para a medida BCC Básica. A primeira delas descreve o indicador de expansão radial ϕ^*, o escore de eficiência $1/\phi^*$ e as metas eficientes BCC na produção PROF*, FORM*, ART* E IQG*. Na primeira coluna, estão marcadas com (*) as seis universidades eficientes: as de número 1, 16, 17, 21, 23 e 31[23].

A segunda tabela relaciona os preços virtuais BCC eficientes μ_F^*, μ_A^*, μ_I^* e ν_P^* da UFB analisada, bem como as respectivas universidades de referência.

A ilustração 6.1 mostra, esquematicamente, a fronteira de eficiência BCC definida por essas seis universidades de referência. Belloni (2000) analisa detalhadamente as facetas II, III e IV e a aresta 21-23, nas quais projetam-se as UFB ineficientes.

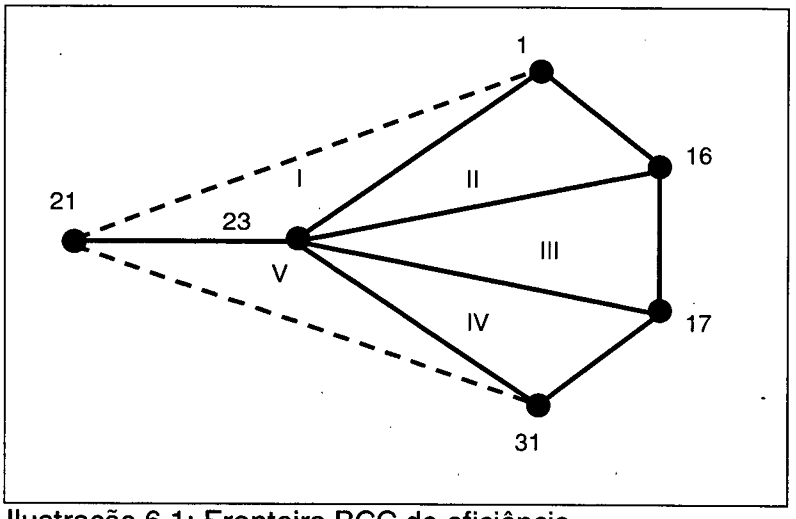

Ilustração 6.1: Fronteira BCC de eficiência
Fonte: Adaptado de Belloni (2000)

6.1 Resultados da Medida SBM

A eficiência técnica avaliada com essa medida é calculada resolvendo o problema de programação matemática descrito em (6.2).

[23] A comparação das estatísticas básicas permite verificar que a ineficiência média desse conjunto de 33 UFB é de aproximadamente 25%. Belloni (2000) apresenta análise detalhada desses resultados.

Medida SBM original:

$$
\begin{aligned}
\tau^* = \ \min \tau = \ & \frac{1 - \dfrac{s_P}{PROF^0}}{1 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{t_F}{FORM^0} + \dfrac{t_A}{ART^0} + \dfrac{t_I}{IQG^0}\right)} = \frac{\rho_C}{\rho_P} \\
\text{sujeito a: } & \sum PROF_j.z_j + s_P = PROF^0 \\
& \sum FORM_j.z_j - t_F = FORM^0 \\
& \sum ART_j.z_j - t_A = ART^0 \\
& \sum IQG_j.z_j - t_I = IQG^0 \\
& \sum z_j = 1 \\
& z_j \geq 0;\ s_P \geq 0;\ t_F \geq 0;\ t_A \geq 0;\ t_I \geq 0
\end{aligned}
\qquad (6.2)
$$

Como detalhado no Apêndice, o problema de otimização (6.2) é transformado, segundo o procedimento de Charnes e Cooper (1962), no problema de programação linear (6.3) descrito abaixo:

$$
\begin{aligned}
\hat{\tau}^* = \min \hat{\tau} = \ & f - \frac{\hat{s}_P}{PROF^0} \\
\text{sujeito a: } & f + \frac{1}{3}\left(\frac{\hat{t}_F}{FORM^0} + \frac{\hat{t}_A}{ART^0} + \frac{\hat{t}_I}{IQG^0}\right) = 1 \\
& \sum PROF_j.\hat{z}_j + \hat{s}_P - PROF^0.f = 0 \\
& \sum FORM_j.\hat{z}_j - \hat{t}_F - FORM^0.f = 0 \\
& \sum ART_j.\hat{z}_j - \hat{t}_A - ART^0.f = 0 \\
& \sum IQG_j.\hat{z}_j - \hat{t}_I - IQG^0.f = 0 \\
& \sum \hat{z}_j - f = 0 \\
& \hat{z}_j \geq 0;\ \hat{s}_P \geq 0;\ \hat{t}_F \geq 0;\ \hat{t}_A \geq 0;\ \hat{t}_I \geq 0
\end{aligned}
\qquad (6.3)
$$

Os resultados computacionais da aplicação dessa medida aos dados da tabela 6.1 estão nas tabelas 6.4 a 6.6. As tabelas 6.4 e 6.5 apresentam resultados da aplicação da medida "SBM modificada" (6.3). Na primeira, estão o escore de eficiência $\hat{\tau}^*$, o parâmetro f^*, bem como o excesso e as folgas de ineficiência $\hat{s}_P{}^*$, $\hat{t}_F{}^*$, $\hat{t}_A{}^*$ e $\hat{t}_I{}^*$, enquanto que, na segunda, encontram-se os preços virtuais da eficiência SBM v_P^*, μ_F^*, μ_A^* e μ_I^* e as UFB de referência. A tabela 6.6 apresenta os escores de eficiência no consumo ρ_C^* e na produção ρ_P^*, os escores de eficiência total τ^*, bem como o excesso de insumo e as folgas da produção reais da medida SBM original s_P^*, t_F^*, t_A^* e t_I^*, obtidos pela transformação: $\tau^* = \hat{\tau}^*$, $s^* = \hat{s}^*/f^*$, $t^* = \hat{t}^*/f^*$, $z^* = \hat{z}^*/f^*$

Note-se, em primeiro lugar, que as universidades 1, 16, 17, 21, 23 e 31 formam o elenco de universidades eficientes, tanto quando avaliadas com a medida SBM, como quando avaliadas com a medida BCC. Tal fato não é surpreendente, mas sim óbvio, pois as fronteiras de eficiência dependem somente da tecnologia produtiva, sendo, portanto, indiferentes às medidas de eficiência adotadas para verificar se algum plano de operação observado é eficiente ou não.

A ilustração 6.2 mostra a fronteira SBM de eficiência. Observe-se que, quando avaliadas com a medida SBM, as UFB ineficientes projetam-se somente na faceta IV, nas arestas 17-23 e 21-23, e no vértice 23, fato que justifica a variação dos preços virtuais, haja vista que o objetivo do produtor é maximizar o "lucro global virtual".

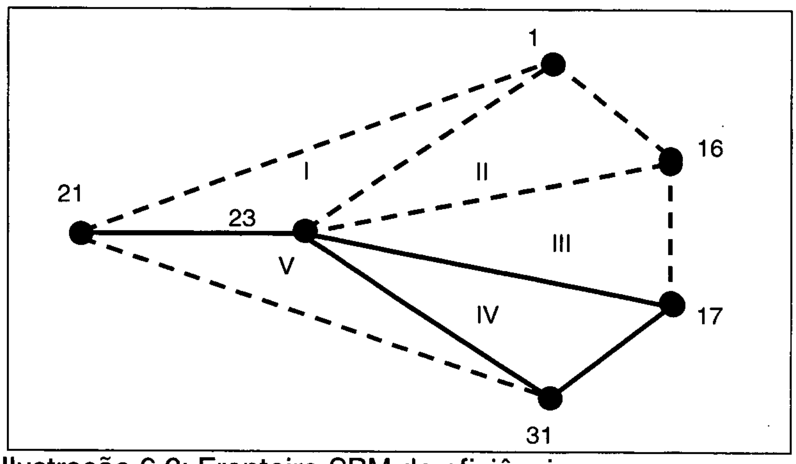

Ilustração 6.2: Fronteira SBM de eficiência

A ilustração 6.3, que diz respeito a UFB 2, auxilia a exposição da aplicação da medida SBM. Destaque-se que as metas BCC e SBM são eficientes[24] e, portanto, constituem-se em alternativas para essa universidade. Escolher entre uma e outra é decisão política do gestor dessa instituição. A meta BCC deve ser adotada quando o

[24] A tabela 6.9 sintetiza as metas eficientes BCC, SBM e RAM.

produtor quer otimizar a produtividade maximizando a receita virtual por unidade de produto virtual, enquanto que a meta SBM deve ser adotada quando o produtor quer otimizar a produtividade maximizando o lucro global virtual.

Medidas	BCC orientada para a produção	SBM
Indicadores de Eficiência	$E_p^* = \phi^* + (\vec{1}.S\,\vec{1}.T)\varepsilon = 1{,}66 + 214\varepsilon$	$\tau^* = 0{,}1999$ e $f^* = 0{,}2894$ $\rho_C^* = 0{,}6907$ $\rho_P^* = 3{,}4553$

Observado		Excesso e folgas[25]	Meta eficiente	Excessos e folgas	Meta eficiente
PROF	970	(0) + (0)	970	300	670
FORM	754	(499) + (0)	1253	115	869
ART	55	(36) + (208)	299	332	387
IQG	27,30	(17,70) + (6)	51	32,13	59,43

Ilustração 6.3: Metas BCC e SBM eficientes para a UFB 2.

Recorde-se que os indicadores $E_p^* = 1{,}66 + 214\varepsilon$ e $\tau^* = 0{,}1999$ medem ineficiências diferentes. Primeiro, note que $E_P^* = 1{,}66 + 214\varepsilon$ informa somente que $[U^0;X^0]$ é um plano Pareto-Koopmans ineficiente; porém, sua interpretação é impossível. Quando muito, pode-se dizer que a produção pode crescer equiproporcionalmente no máximo 66%, mas não dá a menor idéia do tamanho de excessos de consumo e de adicionais de folgas na produção, pois ε é um número não-arquimedidano. Ademais, não se pode inferir conclusões a partir do número 214, que é a "soma" de quantidades em diferentes unidades. Já o segundo indicador $\tau^* = 0{,}1999$, dá uma idéia de que a UFB 2 é altamente ineficiente, pois a ineficiência conjunta de consumo e da produção ($1-\tau^*$) é próxima de 80%. Conhecido o valor $f^* = 0{,}2894$, pode-se dizer que a ineficiência média da produção ($\rho_P^* - 1 = 2{,}4553$) é alta, pois a produção poderia crescer, em média, 245%. Por sua vez, a ineficiência média no consumo ($1 - \rho_C^* = 0{,}3093$) é também alta, pois o consumo médio pode ser reduzido em 31%, como mostrado abaixo:

[25] O primeiro número corresponde a excesso/folga radial e o segundo a excesso/folga não-radial. Na tabela 6.2, as metas eficientes dizem respeito somente à expansão radial da produção, enquanto que nesta ilustração a metas incluem expansão radial e não-radial, de modo a possibilitar a comparação entre as metas eficientes das medidas completas.

Eficiência média no consumo:

$$\rho_C^* = 1 - \frac{1}{N}\sum\frac{s_P^*}{x_P} = 1 - \frac{1}{1} \cdot \frac{s_P^*}{PROF^2} = 1 - \frac{300}{970} = \mathbf{0{,}6907}$$

Eficiência média na produção:

$$\rho_P^* = 1 + \frac{1}{M}\sum\frac{t_m^*}{u_m} = 1 + \frac{1}{3}\left[\frac{t_F^*}{FORM^2} + \frac{t_A^*}{ART^2} + \frac{t_I^*}{IQG^2}\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{3}\left[\frac{115}{754} + \frac{332}{55} + \frac{32{,}13}{27{,}30}\right] = \mathbf{3{,}4553}$$

Escore de eficiência SBM:

$$\tau^* = \frac{\rho_C^*}{\rho_P^*} = \frac{0{,}6907}{3{,}4553} = \mathbf{0{,}1999}$$

6.2 Resultados da Medida RAM

A eficiência técnica avaliada por essa medida é calculada resolvendo o problema de programação linear:

$$\Gamma^*[U^0;X^0] = \min \Gamma = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{s_P}{R_P^-} + \frac{t_F}{R_F^+} + \frac{t_A}{R_A^+} + \frac{t_I}{R_I^+}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a:} \quad & \sum PROF_j.z_j + s_P = PROF^0 \\ & \sum FORM_j.z_j - t_F = FORM^0 \\ & \sum ART_j z_j - t_A = ART^0 \\ & \sum IQG_j z_j - t_I = IQG^0 \\ & \sum z_j = 1 \\ & z_j \geq 0;\ s_P \geq 0;\ t_F \geq 0;\ t_A \geq 0;\ t_I \geq 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Os resultados computacionais da aplicação da medida estão nas tabelas 6.7 e 6.8. A primeira delas apresenta os escores de eficiência RAM no consumo ρ_C^* e na produção ρ_P^*, o escore de eficiência RAM global Γ^*, bem como o excesso e as folgas de ineficiência s_P^*, t_F^*, t_A^* e t_I^*. Na segunda tabela são apresentados os preços virtuais da eficiência RAM v_P^*, μ_F^*, μ_A^* e μ_I^* e as UFB de referência.

Como visto na aplicação das medidas BCC e SBM, também com a medida RAM as universidades 1, 16, 17, 21, 23 e 31 formam o elenco de universidades eficientes, uma vez que, como já foi dito, as fronteiras de eficiência dependem somente da tecnologia produtiva, sendo, portanto, indiferentes às medidas de eficiência adotadas para verificar se algum plano de operação observado é eficiente ou não.

A ilustração 6.4 mostra a fronteira RAM de eficiência. Similar à análise da fronteira SBM, a fronteira RAM mostra que as UFB ineficientes projetam-se somente na faceta IV, nas arestas 17-23 e 21-23, e no vértice 23. Nesse caso, observa-se que são iguais os preços virtuais dos insumos e produtos do conjunto de UFB projetadas em uma dada faceta, aresta ou vértice.

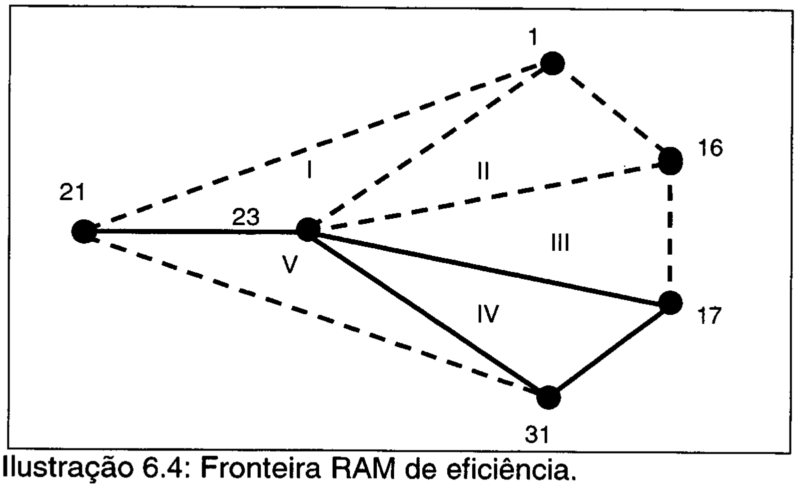

Ilustração 6.4: Fronteira RAM de eficiência.

A ilustração 6.5 auxilia a exposição da aplicação da medida RAM para a UFB 2, em relação aos resultados eficientes obtidos pela medida BCC. As metas BCC e RAM são eficientes, e, portanto, são alternativas para essa universidade. As metas BCC devem ser adotadas quando o produtor quer otimizar a produtividade maximizando a receita virtual por unidade de produto virtual, enquanto as metas

RAM devem ser adotadas quando o produtor quer aumentar sua produtividade ao otimizar o seu lucro virtual, como expresso na forma dos multiplicadores (5.4)[26].

Medidas	BCC orientado para a produção	RAM
Indicadores de Eficiência	$E_p^* = \phi^* + (\vec{1}.S\vec{1}.T)\varepsilon = 1{,}66 + 214\varepsilon$	$\Gamma^* = 0{,}6920$ $\rho_C^* = 1 \quad \rho_P^* = 0{,}5893$

Observado		Excesso e folgas	Meta eficiente	Excesso e folgas	Meta eficiente
PROF	970	(0) + (0)	970	0	970
FORM	754	(499) + (0)	1253	427	1181
ART	55	(36) + (208)	299	421	476
IQG	27,30	(17,70) + (6)	51	33,07	60,37

Ilustração 6.5: Metas BCC e RAM eficientes para a UFB 2.

Os indicadores $E_P^* = 1{,}66 + 214\varepsilon$ e $\Gamma^* = 0{,}6920$ medem ineficiências diferentes. Como já foi visto $E_P^* = 1{,}66 + 214\varepsilon$ pouco informa sobre a ineficiência de $[U^0;X^0]$. Já o segundo indicador, $\Gamma^* = 0{,}6920$, dá uma idéia de que a UFB 2 é moderadamente ineficiente, pois a soma das ineficiências do consumo e da produção, que dá a ineficiência global ($1-\Gamma^*$), é de aproximadamente 30%. A ineficiência média da produção ($\rho_P^* - 1 = 0{,}4107$) indica que essa universidade poderia ter a sua produção aumentada, em média, 41%, o que representa toda a ineficiência dessa universidade, pois não existe ineficiência no consumo ($1-\rho_C^* = 0$). O cálculo das ineficiências segundo a RAM é demonstrado abaixo:

Eficiência média no consumo:

$$\rho_C^* = 1 - \left(\frac{1}{N} \sum \frac{s_P^*}{R_P^-} \right) = 1 - \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{s_P^*}{R_P^-} \right) = 1 - \frac{0}{3081} = \mathbf{1}$$

Eficiência média na produção:

$$\rho_P^* = 1 - \left(\frac{1}{M} \sum \frac{t_m^*}{u_m} \right) = 1 - \left(\frac{1}{3} \left[\frac{t_F^*}{R_F^+} + \frac{t_A^*}{R_A^+} + \frac{t_I^*}{R_I^+} \right] \right) = 1 - \left(\frac{1}{3} \left[\frac{427}{3465} + \frac{421}{1196} + \frac{33{,}07}{43{,}69} \right] \right)$$

$= 1 - 0{,}4107 = \mathbf{0{,}5893}$.

[26] Tanto RAM quanto SBM buscam maximizar o lucro global virtual; todavia, elas assumem diferentes relações entre os preços virtuais.

Escore de eficiência RAM:

$$\Gamma^* = \frac{1}{N+M}[(\rho_C^*.N) + (\rho_P^*.M)] = \frac{1}{4}[(1.1) + (0{,}5893.3)] = \mathbf{0,\ 6920}$$

UFB	CONSUMO	PRODUÇÃO		
	PROF	FORM	ART	IQG
1	1826	2348	47	28,86
2	970	754	55	27,30
3	1066	478	46	39,03
4	1952	1711	336	57,66
5	1357	1422	197	51,83
6	2890	1654	170	37,02
7	1636	1501	329	47,86
8	1758	1354	70	42,80
9	427	267	34	24,40
10	884	611	6	37,32
11	1036	809	54	40,20
12	545	490	49	37,53
13	1136	1125	72	61,78
14	2690	932	88	51,70
15	827	716	47	58,01
16	2748	3115	806	61,65
17	3424	3732	1202	68,09
18	575	499	171	35,23
19	586	505	30	46,25
20	1070	962	23	45,48
21	343	278	122	29,42
22	579	326	305	49,07
23	670	869	387	59,43
24	1829	1874	421	61,64
25	2583	2088	819	67,08
26	1657	1856	377	50,30
27	1246	1212	213	57,85
28	550	410	36	43,28
29	709	703	54	41,00
30	1127	1305	85	39,34
31	1406	1106	329	65,91
32	1211	958	15	38,61
33	774	781	43	46,42
Média	1335,97	1174,27	213,27	46,95
desvio padrão	795,64	799,7	271,67	12,11
Mínimo	343	267	6	24,4
1° quartil	709	610,5	46,5	38,61
Mediana	1127	958	85	46,25
3° quartil	1758	1501	329	57,85
Máximo	3424	3732	1202	68,09
Amplitude	3081	3465	1196	43,69

Tabela 6.1: Dados de 33 Universidades Federais Brasileiras.
Fonte: Adaptado de Belloni (2000)

UFB		INDICADOR	ESCORE DE EFICIÊNCIA	METAS EFICIENTES			
		ϕ^*	$1/\phi^*$	PROF*	FORM*	ART*	IQG*
1	*	1	1	1826	2348	47	29
2		1,66	0,60	970	1253	91	45
3		1,61	0,62	1066	770	74	63
4		1,14	0,88	1952	1944	381	65
5		1,14	0,88	1357	1619	224	59
6		1,82	0,55	2890	3015	310	68
7		1,27	0,79	1636	1906	418	61
8		1,47	0,68	1758	1991	103	63
9		1,52	0,66	427	406	52	37
10		1,63	0,61	884	996	9	61
11		1,51	0,66	1036	1223	82	61
12		1,28	0,78	545	626	63	48
13		1,01	0,99	1136	1140	73	63
14		1,30	0,77	2690	1213	114	67
15		1,05	0,95	827	751	49	61
16	*	1	1	2748	3115	806	62
17	*	1	1	3424	3732	1202	68
18		1,40	0,71	575	697	239	49
19		1,12	0,89	586	565	33	52
20		1,33	0,75	1070	1284	31	61
21	*	1	1	343	278	122	29
22		1,03	0,97	579	335	313	50
23	*	1	1	670	869	387	59
24		1,04	0,96	1829	1948	437	64
25		1,002	1	2583	2091	820	67
26		1,07	0,93	1657	1984	403	54
27		1,08	0,93	1246	1309	230	62
28		1,12	0,89	550	458	41	48
29		1,31	0,76	709	919	71	54
30		1,11	0,90	1127	1454	94	44
31	*	1	1	1406	1106	329	66
32		1,53	0,65	1211	1461	22	59
33		1,26	0,79	774	987	54	59
Média		1,24	0,83	1335,97	1387,67	234,06	56,30
Desvio padrão		0,24	0,15	795,64	828,10	270,48	10,42
Mínimo		1,00	0,55	343,00	278,00	9,00	29,00
1° quartil		1,03	0,71	709,00	770,00	54,00	50,00
Mediana		1,14	0,88	1127,00	1223,00	103,00	61,00
3° quartil		1,40	0,97	1758,00	1944,00	329,00	63,00
Máximo		1,82	1,00	3424,00	3732,00	1202,00	68,00

Tabela 6.2 : Escores BCC de eficiência. Metas eficientes BCC.
Fonte: Belloni (2000)

UFB		CONSUMO	PRODUÇÃO			UFB DE REFERÊNCIA
		ν_P^*	μ_F^*	μ_A^*	μ_I^*	
1	*	3,05	2,64	1	1	1, 16, 23
2		3,05	2,64	1	1	1, 16, 23
3		1,94	1	1	193,10	17, 23, 31
4		1,94	1	1	193,10	17 23, 31
5		3,05	2,64	1	1	1, 16, 23
6		1,94	1	1	193,10	17, 23, 31
7		2,74	2,34	1	1	16, 17, 23
8		1,94	1	1	193,10	17, 23, 31
9		2,71	1	1	1	21, 23
10		1,94	1	1	193,10	17, 23, 31
11		1,94	1	1	193,10	17, 23, 31
12		2,71	1	1	1	21, 23
13		1,94	1	1	193,10	17, 23, 31
14		1,94	1	1	193,10	17, 23, 31
15		1,94	1	1	193,10	17, 23, 31
16	*	2,74	2,34	1	1	16, 17, 23
17	*	1,94	1	1	193,10	17, 23, 31
18		2,71	1	1	1	21, 23
19		2,71	1	1	1	21, 23
20		1,94	1	1	193,10	17, 23, 31
21	*	2,71	1	1	1	21, 23
22		2,71	1	1	1	21, 23
23	*	1,94	1	1	193,10	17, 23, 31
24		1,94	1	1	193,10	17, 23, 31
25		1,94	1	1	193,10	17, 23, 31
26		3,05	2,64	1	1	1, 16, 23
27		1,94	1	1	193,10	17, 23, 31
28		2,71	1	1	1	21, 23
29		3,05	2,64	1	1	1, 16, 23
30		3,05	2,64	1	1	1, 16, 23
31	*	1,94	1	1	193,10	17, 23, 31
32		3,05	2,64	1	1	1, 16, 23
33		3,05	2,64	1	1	1, 16, 23

Tabela 6.3 : Preços virtuais BCC. UFB de referência.
Fonte: Belloni (2000)

UFB		ESCORE	PARÂMETRO	EXCESSO E FOLGAS			
		$\hat{\tau}^*$	f	$\hat{s}_P^*$	$\hat{t}_F^*$	$\hat{t}_A^*$	$\hat{t}_I^*$
1	*	1	1	0	0	0	0
2		0,1999	0,2894	87	33	96	9,30
3		0,1604	0,2552	101	100	87	5,21
4		0,5773	0,7614	359	0	221	3,29
5		0,5376	0,6070	94	0	211	5,63
6		0,2363	0,4792	702	0	211	11,88
7		0,5851	0,7491	268	0	178	10,10
8		0,1954	0,3023	188	0	137	5,47
9		0,3440	0,3440	0	56	54	4,38
10		0,0337	0,0444	9	11	17	0,98
11		0,1996	0,3087	113	18	103	5,94
12		0,3563	0,3563	0	54	84	3,72
13		0,3496	0,3496	0	41	138	0
14		0,1206	0,4441	870	0	141	3,52
15		0,2321	0,2865	45	44	97	0,41
16	*	1	1	0	0	0	0
17	*	1	1	0	0	0	0
18		0,6452	0,6452	0	128	90	9,99
19		0,2278	0,2278	0	48	66	1,25
20		0,1049	0,1479	46	0	58	2,10
21	*	1	1	0	0	0	0
22		0,7094	0,7094	0	268	6	1,42
23	*	1	1	0	0	0	0
24		0,7432	0,8305	160	0	209	0,69
25		0,9088	0,9088	0	511	23	0
26		0,7307	0,7476	28	0	217	9,06
27		0,5572	0,6944	171	0	189	1,82
28		0,2789	0,2789	0	67	71	1,43
29		0,2877	0,3045	12	50	101	5,61
30		0,3389	0,3506	13	0	149	7,51
31	*	1	1	0	0	0	0
32		0,0623	0,0999	45	0	40	2,11
33		0,2279	0,2633	27	23	91	3,43
Média		0,48	0,54	101,15	44,00	93,48	3,52
Desvio padrão		0,33	0,31	197,67	99,45	74,19	3,54
Mínimo		0,03	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00
1° quartil		0,23	0,29	0,00	0,00	23,00	0,41
Mediana		0,35	0,44	13,00	0,00	90,00	2,11
3° quartil		0,73	0,76	101,00	48,00	141,00	5,61
Máximo		1,00	1,00	870,00	511,00	221,00	11,88

Tabela 6.4 : Escore e parâmetro "SBM Modificada". Excesso e folgas "SBM Modificada".

UFB		CONSUMO#	PRODUÇÃO#			UFB DE REFERÊNCIA
		ν_P^*	μ_F^*	μ_A^*	μ_I^*	
1	*	22304	19302	7090	11550	1
2		1030	88	1212	2442	23
3		938	112	1163	1370	23
4		512	319	572	3338	17, 23
5		736	439	909	3458	17, 23
6		346	195	463	2128	17, 23
7		611	407	593	4076	17, 23
8		568	277	931	1523	17, 23
9		3940	429	3372	4699	21, 23
10		1131	18	1871	301	23
11		965	82	1232	1655	23
12		2692	242	2423	3164	21, 23
13		965	104	1619	120294	17, 23, 31
14		371	224	459	782	17, 23
15		1209	108	1646	1334	23
16	*	2013	1780	413	5406	16
17	*	292	106	277	31770	17
18		2357	430	1258	6105	21, 23
19		2474	150	2531	1642	21, 23
20		934	463	1521	769	17, 23
21	*	5418	1198	2731	11329	21
22		2381	725	775	4819	21, 23
23	*	1492	383	3637	5608	23
24		546	346	588	4020	17, 23
25		394	145	369	42765	17, 23, 31
26		603	382	646	4842	17, 23
27		802	514	872	3211	17, 23
28		2699	226	2582	2148	21, 23
29		1410	136	1776	2339	23
30		887	466	1329	2871	17, 23
31	*	944	301	1013	105232	31
32		825	397	1386	538	17, 23
33		1291	97	1767	1637	23

Tabela 6.5 : Preços virtuais “SBM Modificada”. UFB de referência.
Multiplicados Por 10^6

UFB		ESCORES DE EFICIÊNCIA			EXCESSO E FOLGAS			
		τ^*	ρ_C^*	ρ_P^*	s_P^*	t_F^*	t_A^*	t_I^*
1	*	1	1	1	0	0	0	0
2		0,1999	0,6907	3,4553	300	115	332	32,13
3		0,1604	0,6285	3,9179	396	391	341	20,40
4		0,5773	0,7581	1,3133	472	0	291	4,32
5		0,5376	0,8857	1,6475	155	0	347	9,27
6		0,2363	0,4931	2,0868	1465	0	440	24,78
7		0,5851	0,7811	1,3349	358	0	238	13,48
8		0,1954	0,6464	3,3079	621	0	455	18,10
9		0,3440	1	2,9073	0	163	156	12,73
10		0,0337	0,7579	22,5049	214	258	381	22,11
11		0,1996	0,6467	3,2397	366	60	333	19,23
12		0,3563	1	2,8070	0	153	237	10,43
13		0,3496	1	2,8601	0	116	394	0
14		0,1206	0,2715	2,2516	1959	0	317	7,92
15		0,2321	0,8101	3,4907	157	153	340	1,42
16	*	1	1	1	0	0	0	0
17	*	1	1	1	0	0	0	0
18		0,6452	1	1,5499	0	198	139	15,48
19		0,2278	1	4,3898	0	212	289	5,47
20		0,1049	0,7097	6,7633	311	0	390	14,23
21	*	1	1	1	0	0	0	0
22		0,7094	1	1,4097	0	379	8	2,01
23	*	1	1	1	0	0	0	0
24		0,7432	0,8948	1,2041	192	0	252	0,83
25		0,9088	1	1,1003	0	562	26	0
26		0,7307	0,9773	1,3376	38	0	291	12,12
27		0,5572	0,8025	1,4402	246	0	272	2,62
28		0,2789	1	3,5860	0	242	254	5,14
29		0,2877	0,9449	3,2841	39	166	333	18,43
30		0,3389	0,9666	2,8524	38	0	426	21,41
31	*	1	1	1	0	0	0	0
32		0,0623	0,6239	10,0117	455	0	397	21,09
33		0,2279	0,8656	3,7976	104	88	344	13,01
Média		0,85	3,21	0,48	239	99	243	9,94
Desvio padrão		0,18	3,94	0,33	423	141	158	9,15
Mínimo		0,27	1,00	0,03	0	0	0	0
1° quartil		0,76	1,31	0,23	0	0	139	0,83
Mediana		0,94	2,25	0,35	39	0	291	9,27
3° quartil		1,00	3,46	0,73	311	163	344	18,10
Máximo		1,00	22,50	1,00	1959	562	455	32,13

Tabela 6.6 : Escores de eficiência SBM. Excesso e folgas SBM.

UFB		ESCORES DE EFICIÊNCIA			EXCESSO E FOLGAS			
		Γ^*	ρ_C^*	ρ_P^*	s_P^*	t_F^*	t_A^*	t_I^*
1	*	1	1	1	0	0	0	0
2		0,6920	1	0,5893	0	427	421	33,07
3		0,7225	1	0,6299	0	803	458	21,65
4		0,8414	1	0,7886	0	491	430	5,80
5		0,8503	1	0,8004	0	161	393	9,76
6		0,5393	1	0,3857	0	1523	874	29,39
7		0,8177	1	0,7569	0	372	344	14,61
8		0,7051	1	0,6068	0	646	639	20,05
9		0,8828	1	0,8437	0	163	156	12,73
10		0,7421	1	0,6561	0	480	444	22,78
11		0,7593	1	0,6791	0	440	441	20,38
12		0,8798	1	0,8397	0	153	237	10,43
13		0,9092	1	0,8789	0	116	394	0
14		0,5850	1	0,4467	0	2037	897	14,08
15		0,8855	1	0,8473	0	316	386	1,91
16	*	1	1	1	0	0	0	0
17	*	1	1	1	0	0	0	0
18		0,8680	1	0,8241	0	198	139	15,48
19		0,8930	1	0,8573	0	212	289	5,47
20		0,7889	1	0,7185	0	323	482	15,21
21	*	1	1	1	0	0	0	0
22		0,9595	1	0,9460	0	378	8	2,01
23	*	1	1	1	0	0	0	0
24		0,9128	1	0,8837	0	200	309	1,43
25		0,9540	1	0,9387	0	562	26	0
26		0,8640	1	0,8187	0	39	302	12,23
27		0,8901	1	0,8535	0	256	344	3,39
28		0,9001	1	0,8668	0	242	254	5,14
29		0,8069	1	0,7426	0	206	344	18,55
30		0,7826	1	0,7101	0	39	437	21,53
31	*	1	1	1	0	0	0	0
32		0,7257	1	0,6343	0	473	532	22,52
33		0,8312	1	0,7749	0	196	375	13,34
Média		0,87	1	0,82	0	212,00	344	10,43
Desvio padrão		0,12	0	0,16	0	427	236	9,67
Mínimo		0,54	1	0,39	0	0	0	0
1° quartil		0,78	1	0,71	0	116	139	1,43
Mediana		0,87	1	0,82	0	212	344	10,43
3° quartil		0,91	1	0,88	0	440	437	18,55
Máximo		1	1	1	0	2037	897	33,07

Tabela 6.7 : Escores RAM. Excesso e folgas RAM.

UFB		CONSUMO[#] ν_P^*	PRODUÇÃO[#] μ_F^*	μ_A^*	μ_I^*	UFB DE REFERÊNCIA
1	*	1469	1315	209	5722	1
2		155	72	209	5722	17, 23
3		155	72	209	5722	17, 23
4		155	72	209	5722	17, 23
5		155	72	209	5722	17, 23
6		155	72	209	5722	17, 23
7		155	72	209	5722	17, 23
8		155	72	209	5722	17, 23
9		825	72	209	5722	21, 23
10		155	72	209	5722	17, 23
11		155	72	209	5722	17, 23
12		825	72	209	5722	21, 23
13		209	72	209	22987	17, 23, 31
14		155	72	209	5722	17, 23
15		155	72	209	5722	17, 23
16	*	2420	2457	209	5722	16
17	*	81	72	209	5722	17
18		825	72	209	5722	21, 23
19		825	72	209	5722	21, 23
20		155	72	209	5722	17, 23
21	*	825	72	209	5722	21
22		825	72	209	5722	21, 23
23	*	155	72	209	5722	23
24		155	72	209	5722	17, 23
25		209	72	209	22987	17, 23, 31
26		155	72	209	5722	17, 23
27		155	72	209	5722	17, 23
28		825	72	209	5722	21, 23
29		155	72	209	5722	17, 23
30		155	72	209	5722	17, 23
31	*	209	72	209	22987	31
32		155	72	209	5722	17, 23
33		155	72	209	5722	17, 23

Tabela 6.8 : Preços virtuais RAM. UFB de referência

[#] Multiplicados por 10^6

UFB	PLANO OBSERVADO				METAS BCC BÁSICA				METAS SBM				METAS RAM			
	PROF	FORM	ART	IQG	PROF	FORM	ART	IQG	PROF	FORM	ART	IQG	PROF	FORM	ART	IQG
1 *	1826	2348	47	28,86	1826	2348	47	29	1826	2348	47	28,86	1826	2348	47	28,86
2	970	754	55	27,30	970	1253	299	51	670	869	387	59,43	970	1181	476	60,37
3	1066	478	46	39,03	1066	996	356	63	670	869	387	59,43	1066	1281	504	60,68
4	1952	1711	336	57,66	1952	1944	632	65	1480	1711	627	61,98	1952	2202	766	63,46
5	1357	1422	197	51,83	1357	1619	505	59	1202	1422	544	61,1	1357	1583	590	61,59
6	2890	1654	170	37,02	2890	3037	971	68	1425	1654	610	61,8	2890	3177	1044	66,41
7	1636	1501	329	47,86	1636	1906	597	61	1278	1501	567	61,34	1636	1873	673	62,47
8	1758	1354	70	42,80	1758	1991	704	63	1137	1354	525	60,9	1758	2000	709	62,85
9	427	267	34	24,40	427	430	190	37	427	430	190	37,13	427	430	190	37,13
10	884	611	6	37,32	884	996	400	61	670	869	387	59,43	884	1091	450	60,1
11	1036	809	54	40,20	1036	1223	481	61	670	869	387	59,43	1036	1249	495	60,58
12	545	490	49	37,53	545	643	286	48	545	643	286	47,96	545	643	286	47,96
13	1136	1125	72	61,78	1136	1140	413	63	1136	1241	466	61,78	1136	1241	466	61,78
14	2690	932	88	51,70	2690	2777	884	67	731	932	405	59,62	2690	2969	985	65,78
15	827	716	47	58,01	827	919	375	61	670	869	387	59,43	827	1032	433	59,92
16 *	2748	3115	806	61,65	2748	3115	806	62	2748	3115	806	61,65	2748	3115	806	61,65
17 *	3424	3732	1202	68,09	3424	3732	1202	68	3424	3732	1202	68,09	3424	3732	1202	68,09
18	575	499	171	35,23	575	697	310	51	575	697	310	50,71	575	697	310	50,71
19	586	505	30	46,25	586	717	319	52	586	717	319	51,72	586	717	319	51,72
20	1070	962	23	45,48	1070	1284	505	61	759	962	413	59,71	1070	1285	505	60,69
21 *	343	278	122	29,42	343	278	122	29	343	278	122	29,42	343	278	122	29,42
22	579	326	305	49,07	579	705	313	51	579	705	313	51,08	579	704	313	51,08
23 *	670	869	387	59,43	670	869	387	59	670	869	387	59,43	670	869	387	59,43
24	1829	1874	421	61,64	1829	1948	664	64	1637	1874	673	62,47	1829	2074	730	63,07
25	2583	2088	819	67,08	2583	2637	838	67	2583	2650	845	67,08	2583	2650	845	67,08
26	1657	1856	377	50,30	1657	1984	465	54	1619	1856	668	62,42	1657	1895	679	62,53
27	1246	1212	213	57,85	1246	1309	474	62	1000	1212	485	60,47	1246	1468	557	61,24
28	550	410	36	43,28	550	652	290	48	550	652	290	48,42	550	652	290	48,42
29	709	703	54	41,00	709	919	376	58	670	869	387	59,43	709	909	398	59,55
30	1127	1305	85	39,34	1127	1454	252	47	1089	1305	511	60,75	1127	1344	522	60,87
31 *	1406	1106	329	65,91	1406	1106	329	66	1406	1106	329	65,91	1406	1106	329	65,91
32	1211	958	15	38,61	1211	1461	477	59	756	958	412	59,7	1211	1431	547	61,13
33	774	781	43	46,42	774	987	393	59	670	869	387	59,43	774	977	418	59,76
Média	1336	1174	213	46,95	1336	1388	234	56	1097	1273	456	56,89	1336	1521	527	57,65

Tabela 6.9 : Metas eficientes BCC, SBM e RAM

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES

Pôde-se verificar, ao longo da pesquisa bibliográfica, que a evolução das medidas de eficiência produtiva sempre esteve relacionada aos níveis de desenvolvimento tecnológico do sistema produtivo, às ferramentas matemáticas disponíveis, às necessidades dos tomadores de decisão e, principalmente, à interpretabilidade dessas medidas no meio gerencial,

Cabe destacar que, nessa evolução, a medida seminal

$$\text{eficiência técnica relativa} = \frac{\text{produtividade observada}}{\text{maior produtividade observada}},$$

onde,

$$\text{produtividade} = \frac{\text{quantidade do (único) produto relevante}}{\text{quantidade do (único) insumo relevante}},$$

que foi desenvolvida para os sistemas produtivos existentes nos primórdios dos estudos sobre produtividade e eficiência produtiva, é claramente uma medida de eficiência completa, pois ela:

- é escalar;
- mede eficiência Pareto-Koopmans;
- utiliza algoritmos computacionais já existentes (o processo de divisão),
- é de fácil interpretação gerencial;

Os sistemas produtivos atuais são bem mais complexos, pois empregam múltiplos insumos relevantes para gerar múltiplos produtos relevantes. Além disso, são comuns situações em que não são conhecidos os preços de mercado de todos esses insumos e produtos, nem sequer conhecida a valoração relativa que indica o produtor ser indiferente a usar um insumo ou outro, bem como a gerar um produto ou outro.

O desenvolvimento dos computadores eletrônicos em meados do século XX e a conseqüente evolução das técnicas estatísticas e dos modelos de pesquisa operacional viabilizaram o emprego de Análise Envoltória de Dados no estudo da produtividade e da eficiência produtiva, já na década de 70. Todavia, os instrumentos matemáticos disponíveis nessa época não permitiam a construção de medidas completas de eficiência produtiva, que somente começaram a aparecer na literatura científica nos últimos anos do século XX.

Esta dissertação descreve duas medidas completas de eficiência técnica:

- a medida SBM, baseada no ajustamento dos excesso e das folgas do plano de operação observado [$U^0;X^0$], cuja eficiência técnica busca-se verificar relativamente às quantidades de insumos X^0 e as quantidades de produtos U^0 observados, e
- a medida RAM, baseada no ajustamento das folgas do plano de operação observado [$U^0;X^0$] relativamente às respectivas amplitudes das quantidades de insumos e produtos desse plano, que são tomadas como referência na verificação da eficiência técnica do plano [U^0; X^0].

Em um primeiro passo, mostrou-se que essas duas medidas são completas posto que elas atendem aos requisitos exigidos. Sob esse aspecto, merecem destaque especial:

1 a constatação de que, apesar de serem equivalentes para verificar se o plano de operação observado [U^0; X^0] é Pareto-Koopmans eficiente, essas duas medidas são diferentes e devem ser usadas complementarmente na identificação e no estudo das fontes de ineficiência desse plano; pois:

- a SBM expressa a ineficiência total do plano [U^0; X^0] como o produto da ineficiência média do consumo X^0 pela ineficiência média da produção U^0, que reflete o desejo da produtividade ser aumentada com o aumento do lucro virtual; e
- a RAM expressa a ineficiência total do plano [U^0; X^0] como a soma da ineficiência média do consumo X^0 com a ineficiência média da produção U^0, que reflete o desejo da produtividade ser aumentada com o aumento do lucro virtual.

2 o uso do pacote computacional LINDO e do Excel na aplicação dessas duas medidas, que ilustra elas poderem ser calculadas com o emprego de algoritmos computacionais já existentes, visto que:

- o pacote LINDO está disponível, sem custo, no site www.lindo.com e o Excel faz parte do pacote Microsoft Office, de uso geral em computadores pessoais,
- sendo eles de fácil manuseio na resolução de problemas de programação linear, uma técnica amplamente conhecida e dominada na comunidade científica e profissional da área de Teoria da Produção em geral e de Pesquisa Operacional em particular.

Como ilustrado no capítulo 6, a avaliação da eficiência de um conjunto de planos de operação mostra o mesmo elenco de planos eficientes definindo a fronteira de eficiência técnica empírica, quer a análise seja realizada com as medidas RAM ou SBM, quer seja com a medida de eficiência da produção BCC. Percebe-se que a distância estimada de qualquer plano de operação ineficiente a essa mesma fronteira mudou com a medida empregada na avaliação: por exemplo, e sem perda de generalidade, a ilustração mostra que essas distâncias geram, para a universidade ineficiente 2, os seguintes escores de eficiência:

- $0{,}6024+214\varepsilon$, com a medida BCC de eficiência da produção;
- $\tau^* = 0{,}1999$, $\rho_C^* = 0{,}6907$ e $\rho_P^* = 3{,}4553$ com a medida SBM;
- $\Gamma^* = 0{,}6920$, $\rho_C^* = 1$ e $\rho_P^* = 0{,}5893$ com a medida RAM,

que podem ser assim interpretadas:

- O valor 0,6920 da RAM indica que a ineficiência total $(1-\Gamma^*)$ de 0,3080 é devida 0% à ineficiência no consumo excessivo do insumo professor e 41% à ineficiência na geração insuficiente dos produtos aluno formado, artigos publicados e índice de qualidade de graduação, consideradas aditivamente;
- O valor 0,1999 da SBM indica que a ineficiência total desse plano é devida 31% à ineficiência no consumo excessivo do insumo professor e 245% à ineficiência na geração insuficiente dos produtos aluno formado, artigos publicados e índice de qualidade de graduação, consideradas multiplicativamente;
- O valor $0{,}6024+214\varepsilon$ da medida BCC de eficiência da produção somente permite ter uma idéia de que, por ter um indicador de ineficiência de 1,66 = (1/0,6024), a produção da universidade avaliada pode ser aumentada

equiproporcionalmente cerca de 66%, mas não permite saber qual é o maior aumento possível em cada produto.

A construção e aplicação de medidas completas de eficiência técnica com o emprego de Análise Envoltória de Dados é extremamente recente. Por essa razão, seria muito oportuno que a pesquisa realizada na elaboração desta dissertação fosse estendida nas seguintes direções:

- atualização da revisão bibliográfica com vistas à identificação de medidas completas já existentes, mas não encontradas na literatura estudada, bem como de novas medidas completas que foram propostas desde então;
- aplicação das medidas SBM e RAM a outros tipos de tecnologias produtivas, como, por exemplo, tecnologias não-convexas;
- criação de uma abordagem para análise conjunta dos resultados obtidos com a aplicação dessas duas medidas que forneça ao gestor informações mais consolidadas; e
- Aplicação das medidas SBM e RAM a um banco de dados mais complexo.

REFERÊNCIAS

AFRIAT, S. N. Efficiency estimation of production functions. **International Economics Review**, v.13, n.3, p. 568-598, 1972.

AIGNER, D. J.; CHU, S. F. On estimating the industry production function. **American Economic Review**, v. 58, n. 4, p. 826-839, 1968.

BANKER, R. D.; CHARNES, A.; COOPER, W. W. Some models for estimation technical and scale inefficiency in data envelopment analysis. **Management Science**, v. 30, n. 9, p. 1078-1092, 1984.

BELLONI, A. B. **Uma metodologia de avaliação da eficiência produtiva de universidades federais brasileiras**. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina. – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção Florianópolis, 2000.

CALVO, M. C. M. - **Hospitais Públicos e Privados no Sistema Único de Saúde: O Mito Da Eficiência Privada no Mato Grosso**. Tese de doutorado, . Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2002.

CHARNES, A.; COOPER, W. W.; Programming with linear fractional functional. **Naval Research**, v. 9, p. 181-185, 1962.

CHARNES, A.; COOPER, W. W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision-making units. **European Journal of Operational Research**, v. 2, p. 429-444, 1978.

CHARNES, A.; COOPER, W. W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision making units. **European Journal of Operational Research**, v. 3, p. 339, 1979.

CHARNES, A. COOPER, W. W.; GOLANY, B. e SEYFORD, L. Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions. **Journal of Econometrics**, v. 30, p. 91-107 1985.

COELLI, Tim; RAO, D. S. P.; BATTESE, G. E. **An introduction to efficiency and productivity analysis**. Boston: Klüwer Academic Publishers, 1998. 275 p.

COOPER, W. W.; PASTOR, J. T. **Global efficiency measurement in DEA**. Working paper. Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Alicante, Alicante, Espanha. 1995

COOPER, W. W.; PARK, K. S.; PASTOR, J. T. RAM: a range adjusted measure of inefficiency for use with additive models, and relations to other models and measures in DEA. **Journal of Productivity Analysis**, v. 11, p. 5-42, 1999.

COOPER, W. W.; SEIFORD, L. M.; TONE, K. **Data envelopment analysis:** a comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000. 317 p.

COOPER, W. W.; PARK, K. S.; PASTOR, J. T. The range adjusted measure (RAM) in DEA: a response to the comment by Steinmann and Zweifel. **Journal of Productivity Analysis**, v.15, p. 145-152, 2001.

DEBREU, G. The coefficient of resource utilization. **Econometria**, v. 19, p. 273-292, 1951.

FÄRE, R.; GROSSKOPF, S.; LOVELL, C. A. K. **The measurement of efficiency of production**. Dordrecht: Kluwer-Nijhoff Publishing, 1985.

FÄRE, R.; GROSSKOPF, S.; LOVELL, C. A. K. **Production frontiers**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 296 p.

FÄRE, R.; LOVELL, C. A. K. Measuring the Technical Efficiency of Production. **Journal of Economic Theory**, v. 19, p. 150-162, 1978.

FARRELL, M. J. The measurement of productive efficiency. **Journal of the Royal Statistical Society**, Series A, General, v. 120, part 3, p. 253-281 1957.

FØRSUND, F. R.; SARAFOGLOU, N. **On the origins of data envelopment analysis**. Working paper. Department of Economics University of Oslo, Olso, 2000.

KOOPMANS, T. C. An analysis of production as an combination of activities. In KOOPMANS, T. C (Eds.). **Activity analysis of production and allocation**. New York : Wiley, 1951.

KUMBHAKAR, S. C.; LOVELL, C. A. K. **Stochastic frontier analysis.** Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 333 p.

LAPA, J.S.; NEIVA, C.C. Avaliação em educação: comentários sobre desempenho e qualidade. **Ensaio**, v. 4, n. 12, p. 213-236, 1996.

LOVELL, C. A. K. Production frontiers and productive efficiency. In: FRIED, H. O.; LOVELL C. A. K.; SCHMIDT, S. S (Eds.). **The measurement of productive efficiency:** techniques and applications. New York: Oxford University Press, p. 3-67, 1993.

MARINHO, A.; RESENDE, M.; FAÇANHA, L. Brazilian federal universities: relative efficiency evaluating and data envelopment analysis. **Revista Brasileira de Estatística**, Rio de Janeiro, v. 51, n. 4, p. 489-508. 1997.

MARINHO, A .; FAÇANHA, L.O . – Hospitais universitários: avaliação comparativa da eficiência técnica. **Economia Aplicada**, v.4, n.2, p. 316-49, 2000.

NORMAN, M.; STOKES, B. **Data Envelopment Analysis**: the assessment of performance. John Wiley & Sons, 1991.

NUNES, N. **Avaliação da eficiência produtiva de departamentos universitários**: uma aplicação de análise envoltória de dados. 1998. Dissertação de Mestrado – UFSC, Florianópolis.

PASTOR, J. T.; RUIZ, J. L.; SIRVENT, I. An enhanced DEA Russell graph efficiency measure. **European Journal of Operational Research**, v. 115, p. 596-607, 1999.

RICHMOND, J. Estimating the efficiency of production. **International Economic Review** v.15 n. 2, p. 515-21, 1974.

RUGGIERO, J.; BRETSCHNEIDER, S. The weighted Russell measure of technical efficiency. **European Journal of Operational Research**, v. 108, p. 438-451, 1998.

RUGGIERO, J. Measuring technical efficiency. **European Journal of Operational Research**, v. 121, p. 138-150, 2000.

SHEPHARD , R. W. **Cost and production function**. Princeton: Princeton University Press, 1953.

TANASSOULIS, E.; DYSON, R.G. Estimating preferred target input-output levels using data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, v. 56, p. 80-97, 1992

TAVARES, G. **A bibliography of data envelopment analysis (1978-2001)**. Rutcor Research Report, Rutgers University, USA, 2002.

TONE, K. A slack-based measure of efficiency in data envelopment analysis. **European Journal of Operational Research**, v. 130, p. 498-509, 2001.

VARIAN, H. R. **Microeconomic Analysis.** 3rd Ed. New York: W. W. Norton & Company, 1992. 507 p.

APÊNDICE – ANOTAÇÕES SOBRE A MEDIDA SBM

Em sua primeira parte, este apêndice detalha as manipulações matemáticas que transformam a medida SBM original em uma medida equivalente ("SBM modificada") expressa como um problema de programação linear, portanto, facilmente solucionado com vários pacotes computacionais existentes no mercado. Por sua vez, a segunda parte aborda aspectos de dualidade desse problema de programação linear, enquanto que a terceira parte apresenta a medida SBM definida para tecnologias com retorno de escala variável e descarte forte de insumos e produtos, como empregado no capítulo seis.

1 Forma Primal

Medida SBM Original:

$$\begin{aligned}
\tau^*[U^0;X^0] = \min \tau = \ & \frac{1-\sum s_n/(N.x_{0n})}{1+\sum t_m/(M.u_{0m})} \\
\text{sujeito a: } & -\sum z_j x_{jn} - s_n = -x_{0n} \qquad \forall\, n \\
& \sum z_j u_{jm} - t_m = u_{0m} \qquad \forall\, m \\
& z_j \geq 0\ \forall\ j;\ s_n \geq 0\ \ \forall\ n;\ t_m \geq 0\ \forall\ m.
\end{aligned} \tag{a.1}$$

Esse problema é sempre viável, pois a solução $Z = [z_j] = \vec{1};\ S = [\,s_n\,] = \vec{0}$ e $T = [\,t_m\,] = \vec{0}$ satisfaz as restrições. Por conseguinte, $0 \leq \tau^*\ [\,U^0;\ X^0\,] \leq 1$, uma vez que $0 \leq S \leq X^0$. Ademais, $\tau^*\ [\,U^0;\ X^0\,] \neq 0$ pois $U > 0$ e $X > 0$.

Três passos propostos por Charnes e Cooper (1962) transformam essa medida de forma que possa ser calculada facilmente. Tais passos são:

$$\tau_1^*[U^0;X^0] = \min \tau_1 = \frac{f - \sum f.s_n/(N.x_{0n})}{f + \sum f.t_m/(M.u_{0m})}$$

$$\text{sujeito a: } -\sum f.z_j x_{jn} - f.s_n = f.x_{0n} \qquad \forall n \qquad (a.2)$$

$$\sum f.z_j u_{jm} - f.t_m = f.u_{0m} \qquad \forall m$$

$$f > 0;\ z_j \geq 0\ \forall\ j;\ s_n \geq 0\ \ \forall\ n;\ t_m \geq 0\ \forall\ m.$$

$$\tau_2^*[U^0;X^0] = \min \tau_2 = \frac{f - \sum \hat{s}_n/(N.x_{0n})}{f + \sum \hat{t}_m/(M.u_{0m})}$$

$$\text{sujeito a: } -\sum \hat{z}_j\, x_{jn} - \hat{s}_n = -f.x_{0n} \qquad \forall n \qquad (a.3)$$

$$\sum \hat{z}_j u_{jm} - \hat{t}_m = f.u_{0m} \qquad \forall m$$

$$f > 0;\ \hat{z}_j \geq 0\ \forall\ j;\ \hat{s}_n \geq 0\ \ \forall\ n;\ \hat{t}_m \geq 0\ \forall\ m.$$

onde $\hat{z} = f.z_j\ \forall j;\quad \hat{s}_n = f.s_n\ \forall n;\quad \hat{t}_m = f.t_m\ \forall\ m$

$$\tau_3^*[U^0;X^0] = \min \tau_3 = f - \sum \hat{s}_n/(N.x_{0n})$$

$$\text{sujeito a: } f + \sum \hat{t}_m/(M.u_{0m}) = 1$$

$$f.x_{0n} - \sum \hat{z}_j\, x_{jn} - \hat{s}_n = 0 \qquad \forall\ n \qquad (a.4)$$

$$-f.u_{0m} + \sum \hat{z}_j u_{jm} - \hat{t}_m = 0 \qquad \forall\ m$$

$$f > 0;\ \hat{z}_j \geq 0\ \forall\ j;\ \hat{s}_n \geq 0\ \ \forall\ n;\ \hat{t}_m \geq 0\ \forall\ m.$$

Esse problema de programação matemática é sempre viável, pois a solução $f = 1;\ Z = \vec{1}_j;\ S = \vec{0};\ T = \vec{0}$ satisfaz as restrições. Ademais, $0 < \hat{\tau}_3{}^*[U^0; X^0] \leq f^*$, uma vez que, para toda solução viável,

- $\hat{\tau}_3\,[U^0;X^0] \leq f$ pois $S \geq \vec{0}$ e $X^0 > \vec{0}$
- $\hat{\tau}_3\,[U^0;X^0] > 0$, haja vista que:

- $f.x_{0n} - \hat{s}_n = \sum \hat{z}_j . x_{jn} > 0$, pois $\mathbf{X} > \vec{0}$ e, necessariamente, $Z \neq \vec{0}$, pois caso contrário, $\hat{T} = Z\mathbf{U} - fU^0 = -fU^0 < 0$, pois $\mathbf{U} > \vec{0}$;
- $0 < \sum [f.x_{0n} - \hat{s}_n] / (N.x_{0n}) = \sum [f/N - \hat{s}_n / (N.x_{0n})] = f - \sum \hat{s}_n / (N.x_n) = \hat{\tau}_3 [U^0; X^0]$

Note que $Z = \vec{0}$ não gera solução viável para esse último problema de programação matemática, portanto, $f \leq 0$ não pode ser solução viável. Por conseguinte, $f > 0$ para toda solução viável de (a.4). Assim sendo, a restrição $f > 0$ pode ser substituída por $f \geq 0$, o que torna (a.4) um problema de programação linear viável.

Soluções viáveis são alcançadas com o uso da teoria da dualidade que identifica um conjunto de $Z \geqq \vec{0}$. O dual do problema de programação matemática (a.4) é o seguinte problema de programação linear:

$$
\begin{aligned}
\hat{\Delta}_1{}^* [U^0; X^0] = \max \hat{\Delta} = \ & \xi \\
\text{sujeito a:} \ & \xi + \sum \nu_n x_{0n} - \sum \mu_m u_{0m} = 1 \\
& \sum \nu_n x_{jn} + \sum \mu_m u_{jm} \leq 0 \quad \forall j \\
& \xi.(1/M.u_{0m}) - \mu_m \leq 0 \quad \forall m \\
& -\nu_n \leq . -1/(N.x_{0n}) \ \forall n
\end{aligned}
\qquad (a.5)
$$

Como $\xi = 1 + \sum \mu_m u_{0m} - \sum \nu_n x_{0n}$ para toda solução viável, então esse dual é equivalente ao seguinte problema de maximização:

$$
\begin{aligned}
\hat{\Delta}_2{}^* [U^0; X^0] = \ & \max \hat{\Delta}_2 = 1 + \sum \mu_m u_{0m} - \sum \nu_n x_{0n} \\
\text{sujeito a:} \ & -\sum \mu_m u_{jm} + \sum \nu_n x_{jn} \leq 0 \quad \forall j \\
& \sum \mu_m u_{jm} - \sum \nu_n x_{jn} - \mu_m (M.u_{0m}) \leq 1 \quad \forall m \\
& \nu_n \geq 1/(N.x_{0n}) \ \forall n
\end{aligned}
\qquad (a.6)
$$

Observe que (a.6) é um problema de programação linear típico. Como o problema primal é viável e limitado, então o dual tem sempre solução ótima. Sejam v_n^* e μ_m^* uma solução ótima, para essa solução:

- o teorema das folgas complementares determina os valores de f^*, $\hat{z}_j{}^*$, $\hat{t}_m{}^*$ e $\hat{s}_n{}^*$ ótimos para o primal; e,
- para a medida SBM original,

$$z_j^* = \hat{z}_j{}^*/f^*, \quad t_m^* = \hat{t}_m{}^*/f^* \quad \text{e} \quad s_n^* = \hat{s}_n{}^*/f^*$$

$$\tau^*[U^0;X^0] = \hat{\tau}_3{}^*[U^0;X^0] = \Delta_2^*[U^0;X^0]$$

2 Forma Dual

A forma dual da medida radial CCR orientada para a redução do consumo é:

$$\begin{array}{lll}
\max & \sum \mu_m u_{0m} & \\
\text{sujeito a:} & \sum v_n x_{jn} & = 1 \\
& -\sum \mu_m u_{jm} + \sum v_n x_{jn} & \leq 0 \ \forall\, j \\
& \mu_m & \geq 0 \ \forall\, m \\
& v_n & \geq 0 \ \forall\, n
\end{array} \qquad \text{(a.7)}$$

que representa o desejo do produtor de otimizar a produtividade maximizando a receita virtual $\left[\sum \mu_m u_{0m}\right]$ por unidade de custo virtual $\left[\sum v_n x_{0n} = 1\right]$, quando a tecnologia exibe retorno de escala constante e descarte forte de insumos e produtos $\left[-\sum \mu_m u_{jm} + \sum v_n x_{jn} \leq 0; \mu_m \geq 0; v_n \geq 0\right]$.

Por outro lado, o dual (a.6) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\Delta_2^*[U^0;X^0] = \max \Delta_2 &= 1+\sum \mu_m u_{0m} - \sum \nu_n x_{0n} \\
\text{sujeito a}: -\sum \mu_m u_{jm} + \sum \nu_n x_{jn} &\le 0 \quad \forall j \\
\mu_m &\ge \frac{(1+\sum \mu_m u_{jm} - \sum \nu_n x_{jn})}{M.u_{0m}} \quad \forall m \\
\nu_n &\ge 1/(N.x_{0n}) \quad \forall n
\end{aligned} \tag{a.8}$$

que representa o desejo do produtor de otimizar a produtividade maximizando o lucro global virtual $[\sum \mu_m u_{0m} - \sum \nu_n x_{0n}]$, quando a tecnologia exibe retornos de escala constante e descarte forte de insumos e produtos $[-\sum \mu_m u_{jm} + \sum \nu_n x_{jn} \le 0;\ \mu_m \ge 0; \nu_n \ge 0]$[27] e quando há restrição para os preços virtuais dos insumos $\nu_n \ge 1/(N.x_{0n})$ e dos produtos $\mu_n \ge (1+\sum \mu_m u_{jm} - \sum \nu_n x_{jn})/M.u_{0m}$.

3 Extensões da Medida SBM

Tone (2001) mostra que um plano de operação é eficiente na medida radial CCR orientada para a redução do consumo se e somente se ele também ser eficiente na medida SBM. Ademais, esse autor aponta que as extensões tradicionais de escala (não-crescente, não-decrescente e variável) e de descarte (forte e fraco, de insumo e de produto) podem ser feitas introduzindo as restrições pertinentes na medida (a.1), enquanto que as restrições usuais dos preços virtuais (forma dos multiplicadores) podem ser feitas introduzindo as restrições pertinentes na medida (a.6). Por exemplo, a medida SBM definida em tecnologia que exibe retornos de escala variável e descarte forte de insumos e de produtos, tem as formas abaixo:

<u>Forma primal</u>

[27] $1+\sum \mu_m u_{jm} - \sum \nu_n x_{jn} \ge 1$ pois $\sum \mu_m u_{jm} - \sum \nu_n x_{jn} \ge 0$ para toda solução viável.

$$
\begin{aligned}
\tau^*[U^0;X^0] = \min \tau = \; & \frac{1-\sum s_n/(N.x_{0n})}{1+\sum t_m/(M.u_{0m})} \\
\text{sujeito a}: \; & -\sum z_j x_{jn} - s_n = -x_{0n} && \forall\, n \\
& \sum z_j u_{jm} - t_m = u_{0m} && \forall\, m \\
& \sum z_j = 1 \\
& z_j \geq 0 \;\forall\, j;\; s_n \geq 0 \;\; \forall\, n;\; t_m \geq 0 \;\forall\, m
\end{aligned}
\tag{a.9}
$$

Forma dual

$$
\begin{aligned}
\hat{\Delta}_2{}^*[U^0;X^0] = \max \hat{\Delta}_2 = \; & 1+\sum \mu_m u_{0m} - \sum \nu_n x_{0n} + w^0 \\
\text{sujeito a}: \; & -\sum \mu_m u_{jm} + \sum \nu_n x_{jn} + w^0 && \leq 0 \;\; \forall\, j \\
& \sum \mu_m u_{jm} - \sum \nu_n x_{jn} + w^0 - \mu_m (M.u_{0m}) && \leq -1 \;\; \forall\, m \\
& \nu_n && \geq 1/(N.x_{0n}) \;\forall\, n \\
& w \text{ irrestrito}
\end{aligned}
\tag{a.10}
$$

Claramente, as variáveis duais w^0, μ_m e ν_n podem ter a mesma interpretação tanto para a medida radial BCC como para a medida SBM definida em (a.10).